РЕПУБЛИКА СЕВЕРНА МАКЕДОНИЈА

УНИВЕРЗИТЕТ „СВ. КИРИЛ И МЕТОДИЈ“ ВО СКОПЈЕ

ПЕДАГОШКИ ФАКУЛТЕТ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“ – СКОПЈЕ

Хабиб Реџеп Реџепи

КОНЦЕПТОТ НА ДРОПКИТЕ СПОРЕД ТЕОРИЈАТА НА ПИРИЕ-КИЕРЕН ВО ПОЧЕТНОТО МАТЕМАТИЧКО ОБРАЗОВАНИЕ

Докторски труд

Скопје 2024

Докторанд:
ХАБИБ РЕЏЕП РЕЏЕПИ

Тема:
КОНЦЕПТОТ НА ДРОПКИТЕ СПОРЕД ТЕОРИЈАТА НА ПИРИЕ-КИЕРЕН ВО ПОЧЕТНОТО МАТЕМАТИЧКО ОБРАЗОВАНИЕ

КОНЦЕПТОТ НА ДРОПКИТЕ СПОРЕД ТЕОРИЈАТА НА ПИРИЕ-КИЕРЕН ВО ПОЧЕТНОТО МАТЕМАТИЧКО ОБРАЗОВАНИЕ

Ментор:
проф. д-р Весна Макашевска
Педагошки факултет „Св. Климент Охридски“ – Скопје

Комисија за одбрана:

проф. д-р Слаѓана Јакимовиќ (претседател)
Педагошки факултет „Св. Климент Охридски“ – Скопје

проф. д-р Весна Макашевска (ментор)
Педагошки факултет „Св. Климент Охридски“ – Скопје

проф. д-р Методи Главче (член)
Педагошки факултет „Св. Климент Охридски“ – Скопје

проф. д-р Сузана Никодиновска-Банчотовска (член)
Педагошки факултет „Св. Климент Охридски“ – Скопје

проф. д-р Зоран Михајловски (член)
Педагошки факултет „Св. Климент Охридски“ – Скопје

Научна област:
ПРОГРАМА: ОБРАЗОВАНИЕ НА НАСТАВНИЦИ (ЗА ПРИМАРНОТО ОБРАЗОВАНИЕ)
ПОДРАЧЈЕ: ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ НАУКИ
ПОТЕСНА ОБЛАСТ: ИСТРАЖУВАЊЕ МАТЕМАТИКА

Датум на одбрана:
1.10.2024 г.

Хабиб Реџеп Реџепи

КОНЦЕПТОТ НА ДРОПКИТЕ СПОРЕД ТЕОРИЈАТА НА ПИРИЕ-КИЕРЕН ВО ПОЧЕТНОТО МАТЕМАТИЧКО ОБРАЗОВАНИЕ

Апстракт

Иако дропките се широко вклучени во наставните програми и учебници, нивното разбирање и учење е еден од клучните проблеми за учениците, за наставниците и за родителите насекаде во светот, вклучително и во земјите кои имаат традиција во учењето математиката. Во многу земји во светот се направени истражувања за начинот и за времето кога треба да се изучуваат дропките. Поттикнати од овие резултати, многу земји и меѓународни организации имаат развиено стратегии и проекти во врска со разбирањето на дропките. Од многуте од нив, Теоријата Пирие-Киерен се покажа како многу ефикасна во развојот и во проширувањето на математичкото разбирање на многу математички концепти. Токму ова ме наведе да ја контекстуализирам оваа теорија во разбирањето на дропките и да ја приспособам на средината во Косово. Примената на Теоријата Пирие-Киерен во изработката на наставни програми и учебници овозможува хармоничност и логичност во редоследот на темите и на содржините, како и заснованост на новите знаења врз претходно формирани знаења. Темите за учење во нив се направени хармонично и се логично поврзани, секоја единица за учење е изградена од претходно знаење и истовремено станува основа за градење нови знаења во иднина. Прво, направивме длабока анализа на наставните програми и учебниците поврзани со дропки и веднаш констатиравме дека има определени недостатоци од дидактичко-методски карактер: содржините не се логички распоредени; визуализацијата во учебниците не е соодветна; има несоодветно приспособување кон возраста на учениците. Откако ги утврдивме овие пропусти, организиравме експеримент при што за експерименталните одделенија подготвивме писмени подготовки за наставниците и работни листови за учениците, во согласност со Теоријата Пирие-Киерен. Експерименталниот дел од нашето истражување беше спроведен во три училишта во различни региони на Косово. Од секое училиште беа избрани по две одделенија од III, IV и V одделение (при што едното е експериментално, а другото контролно одделение). Во истражувањето беа вклучени вкупно 464 ученици, од кои 239 во експерименталната група (одделенија) и 225 во контролната група (одделенија). Податоците од ова истражување беа подложени на низа различни статистички анализи за да се истражи статистичката разлика меѓу експерименталната и контролната група. Од општата анализа на резултатите констатиравме дека: просечниот број точни одговори на сите ученици во експерименталното одделение е 8,95, додека во контролното одделение е 6,17. Во експерименталното одделение стандардната девијација беше 2,091, додека во контролното одделение беше 2,782, што покажува дека во експерименталното одделение успеавме значително да ја намалиме разликата меѓу процентот на точни одговори. За да докажеме дека оваа разлика има или нема статистичка значајност, го користевме t-тестот. Податоците од t-тестот покажуваат значајна статистичка разлика ($t = 12.097$, $df = 415.084$, $\mathbf{p < 0.01}$). Со ова го утврдивме присуството на статистичка разлика меѓу експерименталната група и контролната група како резултат на примената на Теоријата Пирие-Киерен. Врз основа на овие резултати препорачувам надлежните образовни институции во Косово да создадат можности за тестирање на примената на Теоријата Пирие-Киерен за изучување на дропките и на други математички содржини. Теоријата Пирие-Киерен во голема мера би го олеснила процесот на вреднување на знаењето на учениците бидејќи ги израмнува содржините и резултатите од учењето, помагајќи да се оцени степенот на нивното исполнување.

Клучни зборови: математика, дропки, разбирање дропки, Теоријата Пирие-Киерен, наставни програми, учебници.

Habib Rexhep Rexhepi

FRACTIONS CONCEPT ACCORDING TO THE PIRIE-KIEREN THEORY IN ELEMENTARY MATHEMATICS EDUCATION

Abstract

Although fractions are widely included in curricula and textbooks, their understanding is one of the main problems for students, teachers and parents everywhere in the world, including countries that have traditions in the learning mathematics. In many countries of the world, research has been done on how (how) and when (when) fractions should be taught. Encouraged by the results of these researches, many countries and international organizations have designed programs and strategiesrelated to the understanding of fractions. In many of them, the Pirier-Kieren theoryhas proven to be very effective in building and expanding mathematical understanding of many mathematical concepts. Therefore, this has led me to contextualize this theory in the understanding of fractions and adapt it to the Kosovar environment. The use of the Pirie-Kieren theory in the design of curricula and textbooks made the learning topics (units) to be harmonious and logically connected with each other, each learning unit is built from precursory knowledge and at the same time they become the basis for building the knowledge. First, we made a deep analysis of the programs and teaching texts related to fractions, we immediately found the marked presence of didactic-methodical nature deficiencies such as: the contents are not arranged in a logical manner; visualization in textbooks is not adequate enough; not adapting the content to the age of the students. After ascertaining these defects, for the experimental part of our research we have designed written preparations for teachers and worksheets for students, all in accordance with the Pirie-Kieren theory. The main (experimental) part of the research was developed in three schools in different regions of Kosovo. From each of these schools, two classes from the III, IV and V parallels were chosen (where one of them is experimental, while the other is a control class). A total of 464 students were included in the research, of which 239 in the experimental group (classes) and 225 in the control group (classes). The data of this research were subjected to a series of different statistical analyzes to investigate the statistical difference between the experimental and control groups. From the general analysis of the results, we conclude that: the average number of correct answers of all students in the experimental classes is 8.95, while in the control classes it is 6.17. In the experimental classes the standard deviation was 2.091, while in the control classes it was 2.782, which shows that in the experimental classes we managed to significantly reduce the difference between the percentage of the number of correct answers. To prove that these changes have or do not have statistical significance, we used the t-test. The t-test data show that we have a significant statistical difference ($t=12.097$, $df=415.084$, $\mathbf{p<0.01}$). We hereby prove the presence of a statistical difference between the experimental group and the control group as a result of the application of the Pirier-Kieren theory. Based on these results, I recommend that the competent educational institutions in Kosovo create opportunities for testing the application of the Pirier-Kieren theory and for the study of fractions and other mathematical content. The Pirier-Kieren theory would also greatly facilitate the process of evaluating students knowledge, because it aligns the contents, learning outcomes, helping to evaluate the degree of their Fulfillment.

Key word: mathematics, fractions, the understanding of fractions, Pirie-Kieren theory, curriculum, textbook.

Благодарност

Сакам да им се заблагодарам на раководството и на сите професори од Педагошкиот факултет „Свети Климент Охридски“ – Скопје, кои во една или во друга форма ми овозможија да бидам овде денеска на овој свечен ден и да се реализирам на овој начин.

Особено ѝ благодарам на мојата менторка, проф. д-р Весна Макашевска, за нејзините совети, коментари и предлози низ ова патување!

Благодарам на директорите, наставниците и учениците од училиштата во кои го спроведов експерименталниот дел од работата!

Благодарност до моето потесно и пошироко семејство кое ми помогна во сите аспекти во текот на ова патување.

Им благодарам и на моите колеги, ученици, студенти, пријатели и на сите оние кои беа со мене цело ова време!

Засекогаш благодарен, Хабиб!

Докторската дисертација му ја посветувам на мојот покоен брат
ФЕТАХ РЕЦЕПИ
„ ... кој те видел и не се насмеал!?
... кој те познаваше и не те сакаше!?“

Изјавувам дека докторскиот труд е оригинален труд што го имам изработено самостојно.

(Хабиб Реџепи)

Изјавувам дека електронската верзија на докторскиот труд е идентична со отпечатениот докторски труд.

(Хабиб Реџепи)

Содржина

Вовед

Математиката е поле на апстрактно знаење изградено со помош на логично размислување за концепти, како што се: броевите, фигурите, структурите и трансформациите.

Математиката се разликува од другите науки поради посебните врски што ги има со реалноста. Математиката е чиста интелектуална наука, изградена врз аксиоматски основи (изјави што не се предмет на проверка, но се земаат априори како вистинити) или на некои претходно договорени договори.

Математиката се занимава со изучување на квантитативните и на квалитативните односи на апстрактни и на конкретни предмети, како и со проучување на просторните форми. Овие квантитативни односи и просторни форми се среќаваат насекаде и секогаш се околу нас, и како такви ја сочинуваат математиката присутна во секоја човечка активност (Ziegler & Loos 2017).

По наставата по мајчин јазик, наставата по математика е втора по важност. Со текот на времето стана една од основните компетенции и основа на доживотното образование. Математиката се изучува како чиста наука, но најчесто се применува и во други дисциплини. Математиката е еден од основните делови на човековата мисла и логика, составен дел од напорите за разбирање на светот и себеси. Математиката обезбедува ефикасен начин за градење ментална дисциплина и поттикнува логично расудување и ментална строгост.

Исто така, математиката игра важна улога во разбирањето на содржината на другите училишни предмети, како што се природните и општествените науки, па дури и во музиката и уметноста. Зошто математиката зазема толку важно и единствено место меѓу другите предмети?

Математиката има трансферна природа. Ако ја анализираме историјата на нејзината наставна програма воопшто, тогаш математиката (геометрија и алгебра) била дел од седумте уметности во средновековна Грција.

Математиката се применува во различни области и дисциплини бидејќи математичките концепти и процедури се користат за решавање проблеми во науката, инженерството, економијата.

Математиката е дел од нашето човечко културно наследство и ние имаме одговорност да го развиваме тоа наследство.

Бидејќи математиката обезбедува основни знаења и вештини за други училишни предмети, како наука, уметност, економија и др., прашањето како математиката се испреплетува со другите училишни предмети заслужува да се разгледа. Во некои наставни програми, математиката се нуди самостојно за да се поддржи изучувањето на други училишни предмети, како на пример „инструменталните предмети“, а во некои други програми математиката се нуди преку интегрирани предмети што ја комбинираат математиката со други области (ICMI, 2008).

Математиката е една од главните науки и области на човечкото општество. Таа е јазик и алатка што го поврзува нашето апстрактно значење со физичкиот свет. Математиката лежи во основата на технолошкиот развој. Нејзината универзалност е неспорна.

Затоа нејзината длабочина и сложеност ја прават исклучително корисна. Корисна затоа што ни помага да го разбереме светот, во наша корист. Корисна затоа што ни овозможува да манипулираме со светот, во наша корист. Конечно, математиката е корисна бидејќи ни дава неверојатна моќ да ги менуваме работите, практично сè околу нас.

Дропките се еден од основните математички концепти. Од самиот термин дропка (дроби, дробење...) сфаќаме дека станува збор за поделба, делба на нешто. Тука станува збор за поделба на целината на еднакви делови.

Поради сложеноста на дропката не постои специфична дефиниција за неа, но во повеќето случаи таа се дефинира со објаснување на нејзиното значење и на елементите што ја сочинуваат, како на пример:

Дропка е број што изразува еден или повеќе еднакви делови на кои е поделена единицата.

Членови на дропката се: именител на дропката – бројот под цртичката што покажува на колку еднакви делови е поделена целата единица; броител на дропката – бројот над цртичката што покажува колку такви еднакви делови се земени од целината (shkenca.org, n.d.).

Дропките имаат централна улога во учењето на математиката. Тие се значајни и поради фактот дека бараат подлабоко значење од поимот за целиот број.

Исто така, дропките се со големо значење за општото образование. Многу деца и возрасни покажуваат ниски нивоа на знаења за својствата и за големината на дропките, иако низ нивното школување ги учеле многу години. Слабото познавање на елементарниот дел за дропките во основните училишта претпоставува ниски математички постигања по алгебра и во општите знаења и способности во средното училиште. Наставниците го знаат значењето на дропките и ја почитуваат оваа врска, тие знаењата на учениците за дропките ги поставуваат како најголеми предности или пречки за успех во нивниот развој (Siegler et al., 2012).

Иако ги наоѓаме опширно опфатени низ училишните програми и учебници, сепак насекаде низ светот нивното разбирање и учење се еден од клучните проблеми за учениците, за наставниците и за родителите. Оваа проблематика се воочува и во местата со традиција во учењето на математиката (Rexhepi, 2017).

Во почетокот се занимававме со историјата на појавата на математиката, која е повеќе резултат на проблемите на секојдневниот живот, со процесот на нејзиното обликување и консолидирање како наука, а потоа и со процесот на започнување и развивање на процесот на учење. Во овој момент, отидовме малку подлабоко за да ги создадеме основите на кои сакаме да го поставиме проблемот на учење (разбирање) на дропките, имено да ги видиме ефектите од користењето на Теоријата Пирие-Киерен во разбирањето дропки во основното образование во Косово (III, IV и V одделение).

Потоа се занимававме со историјата на појавата и развојот на дропката и со концептот на дропката, почнувајќи од најраните времиња на појавата на санките, за да стигнеме до фазите, земјите и народите што оставаат важни траги во нивниот развој.

Потоа истражувавме во врска со математичкото разбирање, со акцент на разбирањето на дропките, а исто така се обидовме да ги дефинираме и да ги категоризираме.

Дел од нашите анализи беа и тековни (последни) пристапи, модели и стратегии за учење дропки во некои од најважните земји во светот. Анализата вклучува програми, учебници и методологии што се занимаваат со дропките и со нивното учење.

Потоа, детално ја анализиравме и ја објаснивме Теоријата на Пирие-Киерен за развојот и за проширувањето на математичкото разбирање, која во последно време многу напредуваше, а која се применува во наставата и во учењето математика во многу земји во светот со напредни образовни системи. Оваа теорија е во согласност со Конструктивистичката теорија претставена од Von Glaserfeld (1987), според кој личностите треба да рефлектираат и да реорганизираат нивни лични конструкции (слики) за да создадат нови концепциски структури.

Теоријата (моделот) Пирие-Киерен е една рекурзивна теорија на математичкото разбирање. Зголемувањето на математичкото разбирање според оваа теорија е динамичен процес, нивелизиран, но не е линеарен. Оваа теорија вклучува осум оригинални нивоа на разбирање, започнувајќи од основното „примитивно знаење“, па до највисокото ниво „создавање“ (Pirie & Kieren, 1994a), (Gibbons, 2012) и (Gülkılık et al., 2015).

Теоријата Пирие-Киерен, главно, се користи за дизајнирање наставни програми и учебници. Програмите и текстовите дизајнирани во согласност со Теоријата Пирие-Киерен ги направија наставните содржини усогласени и логично поврзани меѓу себе, секоја наставна единица е изградена врз претходно знаење и во исто време станува основа за градење нови знаења во иднина.

Имаме добри примери за примена на оваа теорија во многу земји во светот, како во САД, Австралија, Јапонија, Сингапур итн.

Во овој случај, се обидовме да ја контекстуализираме оваа теорија во разбирањето на дропките и за тоа ни помогнаа низа истражувања и студии што се спроведени низ светот.

Во обидите за реформа и промена на образовниот систем, Косово треба да ги земе предвид модерните теории и приоди што се покажаа ефективни во разни земји и да се обиде да ги приспособи кон сопственото поднебје. Теоријата на Пирие-Киерен за градење и за проширување на математичкото разбирање се покажа како многу успешна и нејзините елементи се наоѓаат речиси во сите наставни програми и учебници во земјите што имаат напредни образовни системи. На ова одговара и фактот дека Курикулумот на Косово има конструктивистичка ориентација, каква што е впрочем и оваа теорија.

I. ДЕЛ

1. ТЕОРЕТСКИ ПРИСТАП КОН ПРОБЛЕМОТ НА ИСТРАЖУВАЊЕТО

1.1. Математиката како наука и како наставен предмет низ историјата

Математиката се појави како резултат на искуствата и ставовите на луѓето во решавањето на проблемите и практичните потреби. Овие проблеми, како и секојдневната интеракција со околината, која не беше толку пријателски настроена, го натераа човекот да брои, да пресметува, да гради предмети со различни големини и форми. Така, човекот почна да размислува математички и со текот на времето математиката почна да добива на значење и на тежина, полека создавајќи ги рамките на науката со соодветна структура и организација. Во тој процес, многу математички знаења се формализираат и, како такви, се пренесуваат на други луѓе. Ова создаде потреба за пишување и за зачувување на математичкото знаење. Затоа, математичките дела се напишани на различни материјали, како што се: камен, глина, коска, папирус итн. Систематизацијата и компилацијата на математичкото знаење започнаа релативно доцна. Математиката како објект беше создадена пред 3 000 години. Денес тоа е синтеза на знаењето на аритметика, алгебра, анализа, Евклидова геометрија, аналитичка геометрија и тригонометрија (Малчески, 2010).

Првите почетоци на математиката се среќаваат во Древниот Египет. Математичкото знаење во Древниот Египет се добива емпириски, врз основа на искуството и на интеракцијата со природата. Во Античка Грција, грчките научници измислиле дедуктивен или аксиоматски пристап кон математичкиот третман со акцент на геометријата (Талес, Питагора и други). Меѓу VI и III век п.н.е., грчкото општество станува важен и решителен фактор давајќи му научен карактер на емпиризмот. И ова го означува почетокот на математиката како наука. Самиот термин „математика“ доаѓа од грчкиот збор „mathem“, што значи знаење, учење, наука. Во текот на историјата, основната математика била дел од образовниот систем на античките цивилизации, вклучувајќи ги Древниот Египет, Античка Грција и Римската Империја. Во повеќето случаи, само машките деца со висок статус (богати или каста) биле дел од ова образование.

Важна фаза на математичкото образование е поделбата на либералните Платонови уметности на **тривиум** и **квадриум,** вклучувајќи ги во математичката област аритметиката и геометријата. Оваа структура на образованието продолжува во класичното образование што се одржа долго време во средновековна Европа. Наставата по геометрија речиси целосно беше врз основа на „Елементите“ од Евклид. Во текот на вековите, во кои кинеските, индиските и арапските математичари беа во првите редови, Европа попадна во темна ера во која науката, математиката и речиси сите интелектуални напори стагнираа. „**Сколастичките научници**“[1] веруваат дека само релевантни студии во хуманистичките науки, како што се филозофијата и литературата, се важни и потроши многу време и енергија разговарајќи за деликатни содржини во метафизиката и теологијата, како на пример „Колку ангели може да застанат на врвот на иглата“ (Story of mathematics, 2013).

---

[1] Сколастика (Skolasticizm) е метод на средновековна филозофија која доминираше во наставата на средновековните универзитети во Европа меѓу 1100 и 1700 година, и програма за примена на овој метод во артикулацијата и во заштитата на догмите на сите повисоки плуралистички начини. Сколастиката е метод на учење според кој се става баланс меѓу филозофијата и теологијата.

Од IV до XII век европското знаење и студиите за аритметика, геометрија, астрономија и за музика најчесто се ограничени на преводи на некои дела од древни грчки научници, како Никомах и Евклид. Сите занаети и пресметки биле направени со користење на римскиот нумерички систем, кој не е толку ефикасен, а се користел и абакус заснован врз грчки и римски модели.

Културните, интелектуалните и уметничките движења што ги создаде ренесансата во класичните извори на учење започнаа во Италија околу XIV век и постепено се проширија кон поголемиот дел од Европа во текот на следните два века. Науката и уметноста сè уште беа многу меѓусебно поврзани и мешани во тоа време, илустрирани со делата на уметници и научници, како Леонардо да Винчи, и не е изненадување што, како и во уметноста, револуционерната работа во областа на филозофијата и на науката беше развиена за речиси време (Story of mathematics, 2013).

Во времето на ренесансата, академскиот статус на математиката почна да се менува, правејќи некаква блага и постепена девијација од трендовите на тоа време на догматско образование. Математиката и нејзиното учење во овие времиња, главно, биле поврзани со трговијата и со сообраќајот и се сметале за нерелигиозни (антихристијански).

Првиот наставен план за аритметика вклучувал само четири основни аритметички операции: собирање (+), одземање (-), множење (*) и делење (/) и бил изготвен во Италија во 1300 година од некои училишта во кои децата на италијанските трговци од тоа време можеле да студираат математика. Многу брзо, трговците од други земји, исто така, сакале нивните деца да учат математика, и како резултат на тоа, училиштата почнале да се шират и во други земји. Сопствениците на овие училишта се противеле Платоновата математика да се изучува на универзитетите бидејќи се сметало дека дава филозофско наместо практично знаење. Долго време во Европа, наставата по математика била возможна само за елитата (Emanuel, 2016).

Со растот на капитализмот и на пазарната економија, се појави потреба од нови пристапи за учење математика, а со тоа почна да се шири економскиот пристап за учење математика. Во текот на 17 век, трговците стекнале улога и моќ во општеството, а во исто време тие биле уморни од плаќање за двата типа училишта што ги посетувале нивните деца, училишта за читање и училишта за математика. Постепено, математиката станувала помалку табу-тема и некако тајно станала дел од наставните програми за основно училиште, од кои и денес е дел (Emanuel, 2016).

Во таа насока, во анализата на порталот на Националното јавно радио – NPR со седиште во Washington DC, се цитира Houman Haroun, професор на Универзитетот „Харвард“. Кога децата го прашале зошто треба да учат математика, тој одговорил: „Сакале или не, живееме во свет каде што се важни парите“.

Во истиот дух беа отпечатени и првите математички книги на англиски и на француски јазик, како што е книгата „The Ground of Arts“ од Robert Record во 1543 година. Содржината на оваа книга е во форма на дијалог меѓу наставникот и ученикот со цел да го олесни учењето аритметика без наставник. Општествениот статус на математиката почнал значително да се подобрува. Во 1613 година на Универзитетот во Aberdeen била отворена Катедра за математика, а потоа во 1662 година следела Катедрата за геометрија на Универзитетот во Oxford. Дотогаш било чудно и непрактикувано математиката да се изучува на универзитет. Дури и Исак Њутн не посетувал математика додека не бил примен на Trinity College, Kambridge (1661).

Во текот на XVIII и XIX век, индустриската револуција довела до голем пораст на урбаното население. Основните вештини за броење, способноста да се изговара времето, броењето и пресметувањето пари, како и вршењето на основните аритметички операции станале од суштинско значење во новиот урбан живот. Во рамките на новите образовни системи, математиката станала главен дел од образовните програми почнувајќи од рана возраст.

Во XX век математиката беше дел од програмата за основно образование во сите развиени земји.

Во текот на XX век, образованието по математика беше формирано како наука со сопствени содржини и добро организирани структури (Klein, 2003).

Денес, во современото образование, образованието по математика претставува практика на наставата и учењето по математика. Таа е тесно поврзана со научни истражувања поврзани со нејзината настава и учењето.

Секој предмет е синтеза на научни сознанија од определена област, форми и методи за структурирање на овие сознанија, како и синтеза на наставни содржини, алатки и методи на учење. Диференцијацијата на наставните предмети, главно, е последица на стекнатото знаење, како и на нивното структурирање. Историјата на наставата по математика, како и другите предмети и области, покажува дека елементите на субјектот се определени од општествените и од економските потреби на заедницата, од нивото на развој на различни научни полиња (од нивото на знаењето), од организацијата на наставните алатки и методи (Малчески, 2010).

1.1.1. Современи меѓународни движења за реформа на наставата по математика

Оваа фаза од развојот на наставата по математика започна во средината на 20 век и продолжува до денес. Во овој период, целиот свет со многубројни мерки и многу организирано навлегува во осовременување на целокупниот систем на математичкото образование, занимавајќи се особено со три основни проблеми на современата настава по математика:

Што да се вклучи од областа математика во наставните програми по математика?

Како се предава математиката како предмет во основните и во средните училишта?

На кои математички концепции треба да се заснова наставната програма по математика?

Важна пресвртница во развојот на математичкото образование е крајот на Втората светска војна. Големите промени во економскиот, општествениот и политичкиот систем во светот кои следеа по крајот на Втората светска војна, како и огромниот напредок на науката, технологијата и особено производната технологија во овој период, доведоа до многу силни меѓународни движења за образовни реформи, кои ги прифатија повеќето земји во светот.

Ова се случи, на пример, во Англија кон крајот на војната, односно во 1944 година беше издаден нов закон за образование, познат како „Act of Education“. Со овој закон Англија направи многу важен чекор кон демократизација на образованието, менувајќи ги неговата форма и структура, а образованието стана достапно за сите слоеви на општеството.

Во САД веднаш по Втората светска војна започна интересот на американската влада за математичкото образование, сметајќи го за прашање од национална безбедност. Ова се случи затоа што за време на војната во многу воени единици и одделенија имаше голема загриженост за недоволните математички вештини кај идните офицери (Furr, 1996).

И во Франција, веднаш по завршувањето на Втората светска војна, беше создаден многу важен и доста оригинален проект за реформа на образованието, кој беше одобрен во јануари 1959 година.

Секаде во светот се среќаваме со слични напори како во Германија, поранешен СССР, другите земји од комунистичкиот блок, Белгија, Италија, Јапонија итн.

Во поранешна Југославија, чиј дел беа Косово и Македонија, иако е јасно видливо идеолошкото влијание врз филозофската ориентација на образовниот систем, постојат напори за радикални промени во образовниот систем, вклучително и во математичкото образование.

Сите овие промени истакнуваат некои тенденции што се во фокусот на промените, како на пример:

- Тенденција за структурни промени во образовниот систем.
- Тенденција за модернизација на научните предмети.
- Тенденција за педагошко-методично образование на наставниот кадар.

Дел од овие тенденции беше природно-математичкото образование кое почна да привлекува значително внимание како резултат на побарувачката природното и математичкото образование да бидат во чекор со брзиот развој на науката и на технологијата, барајќи математиката да се вметне во голем број науки и многу практични активности. Ова последователно поттикна радикални промени во наставните програми на основните и на средните училишта, универзитетите, како и во наставната програма по математичко образование за работниците во многу професии (Dehiri, 1982).

Сите овие случувања доведоа до значајни промени и нови трендови во образовните теории и практики, чии темели ги поставија различни образовни психолози, филозофи и истражувачи. Меѓу современите образовни теории што ја истакнуваат оваа фаза се:

Бихевиористичките теории започнаа како реакција против интроспективната психологија во 19 век. Vatson и Skiner ги отфрлија интроспективните методи како субјективни и немерливи. Овие психолози сакаа да се фокусираат на набљудувани, мерливи настани и однесувања. Тие рекоа дека науката треба да води сметка само за забележливи индикатори, а не треба да се заснова само врз мислења. Jon B. Watson, основачот на оваа теорија, го дефинираше бихевиоризмот како наука за однесувањето. Во оваа линија, Burhus F. Skiner го дефинирал концептот на награда и казна, нагласувајќи дека однесувањето може да се промени и да се обликува преку употреба на позитивни или на негативни стимули. Во контекст на образованието, бихевиоризмот се применува на различни начини. Во наставата, употребата на награди и казни се користи за да се помогне во обликувањето на саканото однесување и да се намалат несаканите однесувања (WGU, 2020).

Конструктивизмот се разви како реакција на бихевиоризмот, поточно на неговите ставови за процесот на разбирањето или, со други зборови, како одговор на ограничувањата на бихевиористичкиот пристап кон процесот на разбирање. Додека бихевиоризмот е фокусиран на однесувањата за кои смета дека се резултат на интеракциите меѓу поединецот и неговата околина, гледајќи го ученикот како пасивен примач на информации, конструктивизмот го гледа ученикот како активен чинител во процесот на разбирање. На овој начин, конструктивизмот се појави како пресврт кон постабилен и поможен пристап, кој го гледа ученикот како активен субјект и лежи во суштината на внатрешното значење и изградбата на знаењето.

Така, конструктивизмот е перспектива во областа на образованието и наставата што ја нагласува улогата на активно градење на знаењето од страна на учениците. Овој пристап често се појавува на различни начини, што може да се гледа како различни видови на конструктивизам. Во продолжение даваме некои од главните видови на конструктивизам:

Когнитивниот конструктивизам на Jan Piaget е една од главните теории за учење и за развој на детето која се фокусира на идејата дека децата го градат сопственото разбирање на светот преку искуства и интеракции со околината. Пијаже го дефинира овој процес како активен и конструктивен процес на знаење, сметајќи ги децата како архитекти на нивниот сопствен развој. Пијаже верувал дека децата го градат своето разбирање обидувајќи се да ги разберат и да ги решат проблемите користејќи ги знаењата и вештините што веќе ги поседуваат и со соочување со нови ситуации. Тој нагласи дека когнитивниот развој се јавува преку процесот на адаптација, вклучително и асимилирање нови информации во постојните когнитивни структури и сместување или менување на когнитивните структури за да се приспособат новите информации (Ozer, 2004).

Социјален конструктивизам: Социјалниот конструктивизам ја нагласува важноста на интеракциите и интеракциите со другите во процесот на учење. На учениците се гледа како на дел од заедницата за учење каде што влијанието на врсниците, наставниците и социјалните околности придонесува за изградба на знаење.

Социокултурниот конструктивизам на Lev Vygotsky: Овој тип на конструктивизам комбинира елементи од когнитивниот и од социјалниот конструктивизам, нагласувајќи ја важноста на културниот и на историскиот контекст во процесот на учење. Често овој пристап се фокусира на тоа како културите и општествениот контекст ги обликуваат и влијаат врз значењето и перцепцијата на поединците (Ozer, 2004).

Радикалниот конструктивизам на Von Glaserfeld: Радикалниот конструктивизам оди понатаму во субјективноста на знаењето, сугерирајќи дека реалноста е создадена и интерпретирана поединечно од поединци. Овој тип на конструктивизам нагласува дека знаењето се конструира преку лични перцепции и искуства.

Теоријата за повеќекратната интелигенција на Howard Gardner (1983) ја гледа интелигенцијата не како единствен, фиксен ентитет, туку како збирка на повеќекратни интелигенции, вклучувајќи: лингвистичка (умешност во говор, пишување и комуникација); логичко-математичка (способност за логичко мислење, решавање на проблеми и манипулација со броеви и формули); просторна (способност за визуализација и манипулација со просторни објекти и сцени); телесно-кинестетичка (вештини во управување со телесни движења и координација на телото); музичка (појаснува способност за апрецирање, креирање и изразување на музикални звуци и мелодии); меѓулична (способност за разбирање и за комуникација со другите, како и за развој на меѓулични вештини); меѓуперсонална (способност за разбирање и за развој на сопствените емоции, мисли и вредности); природна (поврзаност и разбирање на природните феномени и еколошките системи) (Morgan, 2021). Овој модел на повеќекратна интелигенција беше важен придонес во областа на образованието и на психологијата, промовирајќи поширок и поразновиден пристап за разбирање и за поддршка на способностите на поединците.

Овие модерни теории за учење се само неколку примери на пристапи што имаат длабоко влијание врз образованието денес и продолжуваат да служат како извор на инспирација за образовно истражување во практиката.

1.2. Третманот на дропките низ историјата

Појавата и употребата на дропките започнаа рано и се многу тесно поврзани со појавата на математичкото размислување. Општоприфатено е дека концептот на природни броеви доаѓа од потребата за броење, додека оној за дропки доаѓа од потребата за мерење. Единицата за броење е една и неделива, додека мерната единица е делива. Природните броеви се доволни за броење на која било дискретна големина, додека барањето за најпрецизно мерење на континуирани величини, како што е потребата за делење и мерење на: денови, месеци, годишни времиња, стоки, површини, предвидување на движењето на ѕвездите и сл., ги условува раѓањето и употребата на дропките (Filep, 2001).

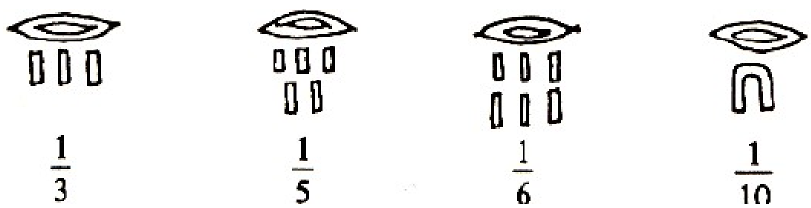
1.2.1. Египетски дропки

Египќаните биле првите што го користеле и го развиле концептот на дропките. Дропките се широко застапени и во првиот документ познат во историјата на математиката, Папирусот на Ахмес (Ахмес – првиот писател познат досега), кој е зачуван во Лондон. Се проценува дека е напишан околу 1650 година п.н.е. Во овој папирус биле дадени и решени многу аритметички, алгебарски и геометриски задачи (84 задачи и проблеми) што ги преокупирале тогашните математичари. Се проценува дека овој папирус го содржи математичкото знаење од 2000 години п.н.е. (Jankov, 2011).

Египетската математика очигледно произлезе од различни реални и практични проблеми и потреби, како на пример: поделбата на полињата по поплавувањето на Нил, градежните проекти, како што се пирамидите, правењето календари, како и разни сметководствени активности и се практикувале од писателите, а можеби дури и од свештениците (Lawson, 2005). Математиката од ова време беше повеќе реторичка, задачите и нивните решенија беа дадени со зборови, на пример: „Еден куп (количина) и третина од неа заедно даваат 15. Колку е купот? (Lazarević, 2012).

Слика 1: Папирус од Ахмес (Rhind)

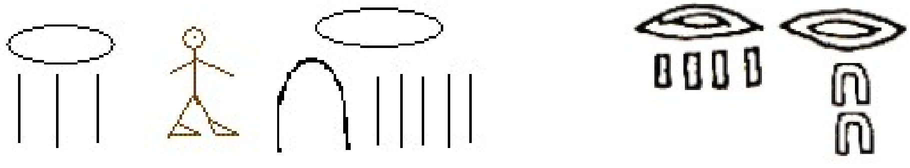
Древните египетски математичари користеле единични дропки (со броител 1). Симболично, дропките биле означени преку хиероглифи на следниов начин.



Слика 2: Означување дропки од Египќаните

Симболот во вид на овална форма ја симболизира устата, односно залакот што ја претставува целосната големина поделена на онолку делови колку што е означениот број подолу, и гласи: 1/3 – трето, 1/5 – петто, ...

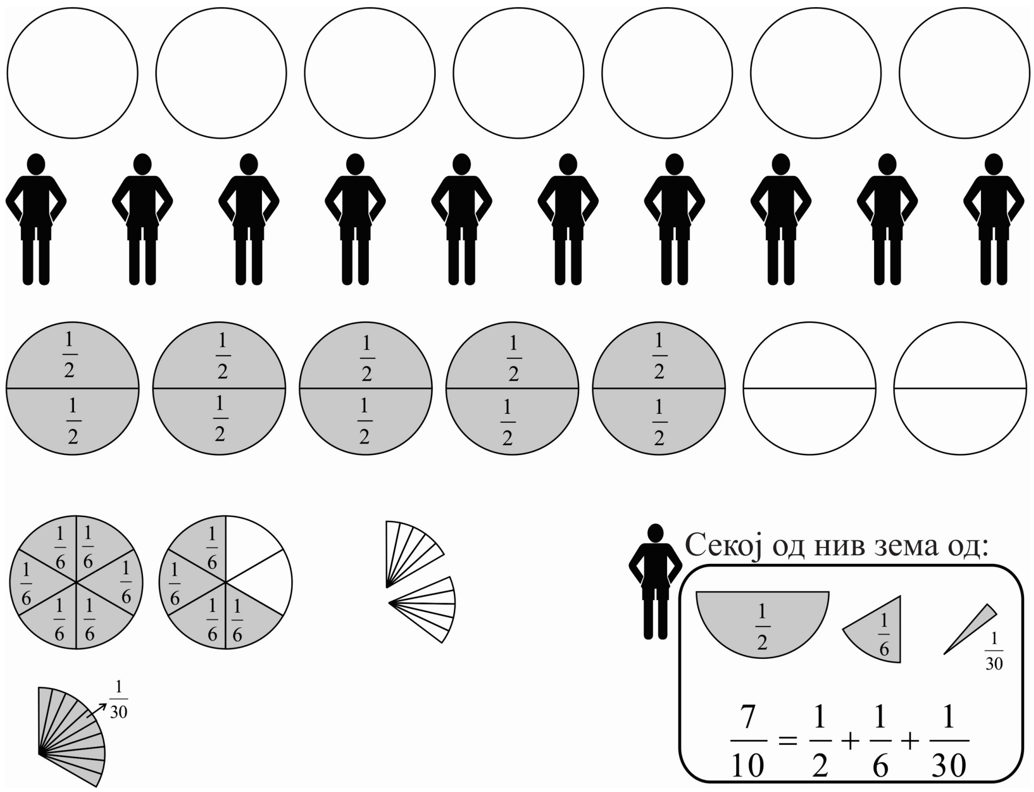
Сите други дропки (не единици) беа изразени како множители на единични дропки (дропки со именител 1), на пример $\frac{2}{5}=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$ кои во тоа време беа претставени како на Слика 3. Фигурата на човекот меѓу дропките со ѓоновите ориентирани од првата дропка до втората го симболизира нивниот збир, додека ако стапалата се свртени во спротивна насока, тогаш го симболизира одземањето (basic mathematics, n.d.),



Слика 3: Запишување на неединични дропки како збир на единични дропки

За подобро да ја илустрираме употребата на дропки при решавање проблеми, да го погледнеме проблемот 4 од Папирусот на Ахмес (Rhind) во кој се барало 7 леба да се поделат подеднакво меѓу 10 луѓе (Filep. 2001).

Прво, секој од седумте леба се дели на 2 еднакви дела, односно имаме 14 дела од 1/2, од кои 1 дел од 1/2 даваме на 10 луѓе и ни остануваат 4 половини (1/2). Сега е подобро да се поделат овие 4 дела на 3 еднакви дела (т.е. 1/6) и да се добијат 12 дела од 1/6, па да дистрибуираме 10 такви дела на 10 луѓе. Сега ни останаа 2 дела од 1/6 од лебот кои ги делиме на уште 5 еднакви дела (1/30) од кои се прават вкупно 10 дела и на 10. луѓе им даваме по еден (1/30).



Слика 4: Илустрација на четвртиот проблем од Папирусот на Ахмес и на неговото решение

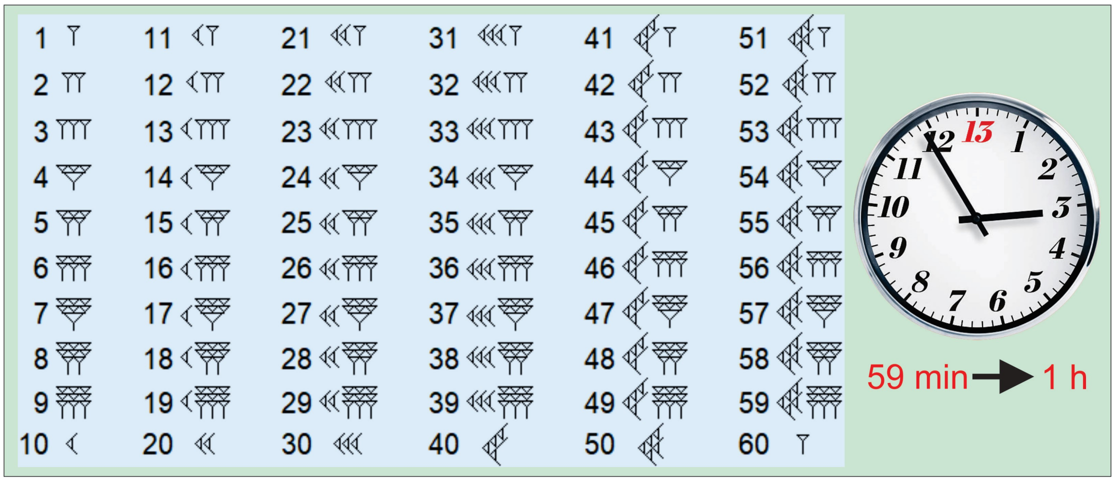
Египетските математичари измислиле и користеле алгоритми за претворање на која било дропка што не е единица во множител на единични дропки, на пример: $\frac{4}{7}=\frac{1}{2}+\frac{1}{14}$, $\frac{5}{8}=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}$, $\frac{7}{9}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{36}$. Тие, исто така, ја знаеле и ја користеле формулата за разложување на која било единична дропка во множител од две други единични дропки: $\frac{1}{n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n\cdot(n+1)}$.

1.2.2. Дропките во Месопотамија

Месопотамија била дом на многу цивилизации илјадници години што значително придонело за светската култура и напредок (Mark, 2018). Сумерите и Вавилонците доминирале во Месопотамија од почетокот на пишаната историја.

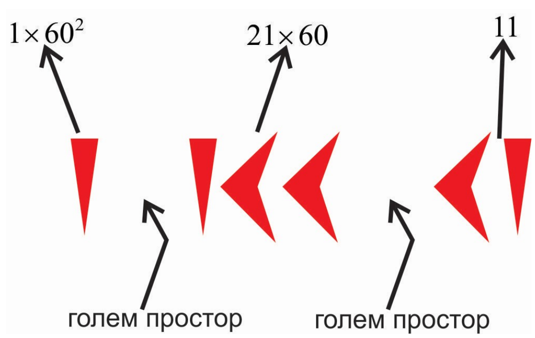
Луѓето од Месопотамија ја развиле математиката пред околу 5000 години. Првично, математичкото знаење беше ограничено на броење (https://factsanddetails.com, 2018). Месопотамиската математика и науката воопшто се засноваа врз сексагесимален (основа 60) нумерички систем на вредности на места (позиционен). Ова е, исто така, извор на 60-минутниот часовник, 24-часовниот ден и кругот од 360°.

Тајната на супериорноста на вавилонската математика над онаа на Египќаните лежи во фактот што тие го прошириле позицискиот систем на целите броеви, како и на дропките (Merzbach & Bayer, 2011).



Слика 5: Илустрација на сексазималниот систем што се користел во Античка Месопотамија

Како се пишувале големите броеви, на пример, бројот 4 871?



$$1\cdot 60^2 + 21\cdot 60^1 + 11\cdot 60^0 = 1\cdot 3600 + 21\cdot 60 + 11\cdot 1 = 3600 + 1260 + 11 = 4871$$

Слика 6: Илустрација на древно вавилонско пишување броеви (адаптирано од: www.basic-mathematics.com)

И дропките биле означени со основа (именител) 60.

Ајде да се обидеме да ги разбереме вавилонските дропки.

За да ги напишете денешните дропки како стар Вавилонец, потребно е да се најде еквивалентна дропка (еднаква) на дропка со именител 60.

На пример: за дропката $\frac{1}{2}$, се прашуваме $\frac{1}{2} = \frac{?}{60}$?

Ние го знаеме тоа како $\frac{1}{2} = \frac{30}{60}$

Така, вавилонскиот еквивалент на дропката $\frac{1}{2}$ е 30, што е означено 𒌋 𒌋 𒌋.

Табела 1: Илустрација на пишување дропки од древните Вавилонци

Дропки од нашето време	**Вавилонски дропки**	**Објаснување**
$\frac{1}{2}$	𒌋 𒌋 𒌋	$\frac{1}{2} = \frac{30}{60}$
$\frac{1}{3}$	𒌋 𒌋	$\frac{1}{3} = \frac{20}{60}$
$\frac{1}{4}$	𒌋 𒁹 𒁹 𒁹 𒁹 𒁹	$\frac{1}{4} = \frac{15}{60}$
$\frac{1}{5}$	𒌋 𒁹 𒁹	$\frac{1}{5} = \frac{12}{60}$
$\frac{1}{6}$	𒌋	$\frac{1}{6} = \frac{10}{60}$

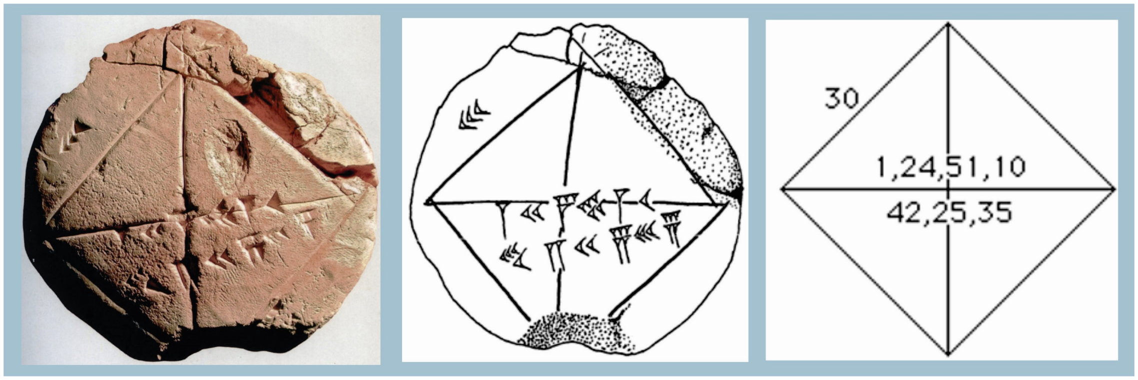
Да ја означиме дропката $\frac{2}{3}$ како вавилонска дропка!

Ја користиме стратегијата прикажана погоре: $\frac{2}{3} = \frac{?}{60}$.

Ние го знаеме тоа како $\frac{2}{3} = \frac{40}{60}$.

Значи, дропката $\frac{2}{3}$ е еквивалентно на 𒌋 𒌋 𒌋 𒌋. (college of math for elementary education)

Како Вавилонците ги означувале децималните броеви?



Слика 7: Плоча YBC 7289, в. 19-18 п.н.е. (collegemathforelementaryeducation.wordpress.com)

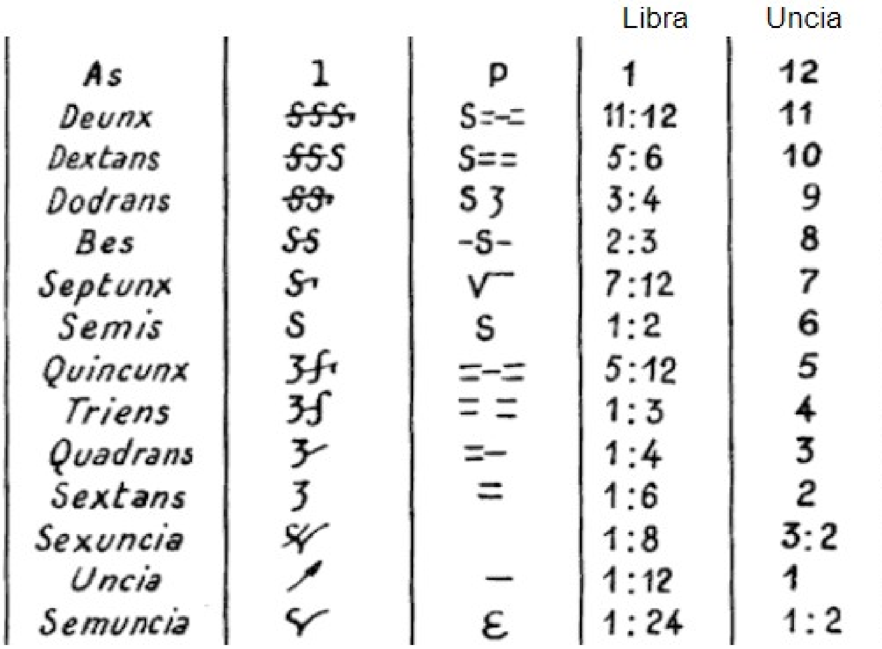
Плочата YBC 7289 покажува квадрат со нацртани две дијагонали. Од ознаката на горната лева страна разбираме дека секоја од страните на квадратот е долга 30 единици. По должината на дијагоналите ги имаме броевите 1, 24, 51, 10 и 42, 25, 35, напишани во согласност со сексагесималниот систем. Првиот број (1, 24, 51, 10) претворен во децимален број дава 1, 414212963 што е приближно $\sqrt{2}$, а вториот број од должината на дијагоналата (42, 25, 35) може да се прочита $42 \cdot 1 + 25 \cdot \frac{1}{60} + 35 \cdot \frac{1}{3600}$ или 42, 426389. Оттука разбираме дека за да се најде должината на дијагоналата на квадратот чии страни имаат должина од 30 единици, се пресметува $30 \cdot [1;\ 24,\ 51,\ 10] = 42;\ 25,\ 35$.

Плочата докажува дека Вавилонците (вавилонските математичари) од почетокот на вториот век (околу 19-18 век п.н.е) покрај доброто познавање на дропките, имале познавања и за приближната единица на квадратниот корен од бр. 2 ($\sqrt{2}$) и го знаеле односот кон ова знаење долго пред грчкиот филозоф и математичар Питагора (5 век п.н.е.) (Yale University, 2016).

1.2.3. Римски дропки

Старите Римјани, како и Старите Египќани, користеле единични дропки (со броител 1). Римјаните ги означувале дропките со користење зборови за да опишат делови од целината. Овој систем на претставување и нотација на дропките се заснова на единичната тежина наречена „Ас“. „Ас“ се состоел од 12 унци (од кои го добиваме зборот „унца“).

Римјаните користеле термини како унција (1/12), семунција (1/24), семис (6/12), скирпулум (1/144).



Слика 8: Илустрација на пишување дропки од Старите Римјани (Michon, 2014)

1.2.4. Грчки дропки

Грчкиот систем за нумерирање беше малку пософистициран, иако не беше позициониран. Неговата посебна карактеристика е тоа што беше децимален и азбучен и бараше употреба на 27 симболи (букви), како и други симболи со соодветно значење.

Табела 2: Илустрација на пишување дропки од Античките Грци

Симбол	**Вредност**	**Симбол**	**Вредност**	**Симбол**	**Вредност**
α	1	ι	10	Ρ	100
β	2	κ	20	Σ	200
γ	3	λ	30	Τ	300
δ	4	μ	40	Υ	400
ε	5	ν	50	Φ	500
ς	6	ξ	60	Χ	600
ζ	7	ο	70	Ψ	700
η	8	π	80	Ω	800
θ	9	Ϙ	90	ϡ	900

На пример, σ π ζ = 287

Старите Грци означувале големи бројки вака:

1 000 – 9 000 ги означиле со ставање апостроф пред единицата.

На пример, ‘γ σ π ζ = 3287

Буквата М се користела за претставување броеви од 10 000 и повисоки.

На пример M^{ε} = 50 000.

За означување единични дропки, се користел апостроф по именителот.

На пример: β'=$\frac{1}{2}$, π'=$\frac{1}{80}$.

Најсложените дропки беа означени вака: броителот со цртичка над и именителот со апостроф по.

На пример: $\overline{\upsilon\alpha}\pi\sigma' = \frac{51}{84}$.

Пресметките, аритметичките операции беа извршени со користење на дистрибутивниот закон.

На пример: $\sigma\pi\zeta \cdot \beta = (\sigma + \pi + \zeta) \cdot \beta = (200 + 80 + 7) \cdot 2 = 400 + 160 + 14 = 574 = \theta o\delta$ (Allen, 2000).

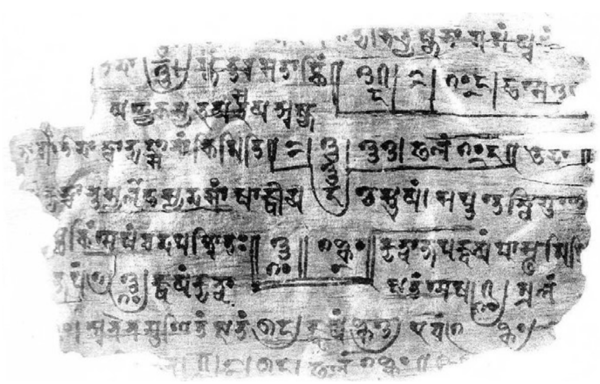
Старите Грци (Евклидовите елементи) ги користеле дропките за различни пресметки и мерења и во многу различни области, како што се: астрономијата, геометријата, музиката (Питагора) и секаде каде што имало потреба од мерење и делење.

1.2.5. Индиски дропки

Постојат документи што покажуваат напредок во знаењето и во употребата на дропките од страна на Индијците. Старите Индијци користеле и сложени дропки и мешани броеви. Првите индиски математичари што се занимавале со истражување и со употреба на дропките се: Рведа (Rgveda, 1000 п.н.е), Силба-сутрас (Sylba-sūtras, 850 п.н.е). Најдлабоко знаење за дропките може да се најде во ракописот на Бахшали (Bakhshālī, 400 п.н.е), додека аритметичките правила што се однесуваат на дропките се опишани од Брамагупта (597-670).

Старите Индијци ги означувале дропките како и денес, броителот над именителот, но без дробна црта, на пример: $\frac{2}{3} \to \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, или мешаниот број $2\frac{3}{5} \to \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$, каде што горе е означен целиот дел, а под него делот од дропката (Sýkorová, 2010).

$$3\frac{3}{8} \to \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix}$$



Слика 9: Ракопис на Bakhshālī во кој е употребен и мешан број

Старите Индијци и Арапи отишле подалеку од употребата на единичните дропки, измислувајќи симболи, користејќи аритметички својства и операции за решавање разни проблеми од секојдневниот живот (Sýkorová, 2010).

Фибоначи (1175 – 1250) е првиот европски математичар што моделирал и користел дропки како што ги користиме денес.

Хоризонталната линија (дробна црта) првпат ја воведоа Арапите. Потоа ја презеле Индијците, подобрувајќи ја и ставајќи ја меѓу броителот и именителот. Дробната линија, главно, е присутна во доцносредновековните латински ракописи, но кога била измислена машината за печатење, таа често била отстранувана поради печатни тешкотии.

Некои автори ја користеле и дијагоналната линија за да ги поделат двата броја (броител и именител) што ја формирале дропката.

Во 1845 година, употребата на хоризонталната линија (soldius) беше препорачана од Де Морган во книгата „The calculus of funktions".

Абу Хасан Ахмад Ибн Ибрахим Ал Уклидиси (Abu'l Hasan Ahmad ibn Ibrahim Al-Uqlidisi, 920 – 980) го напишал најраниот познат текст обезбедувајќи директен третман на децималните дропки.

Кинескиот математичар Јанг Хуи (Yang Hui, 1238 – 1298) беше првиот автор кој употребил децимални дропки во модерна форма во своите две книги (Miller, 2022).

Примери за употреба на децималната точка се наоѓаат во многу различни земји и култури. Има книга од Сајмон Стевин од Холандија објавена во 1585 година со наслов „De Thiende" (Десеттата) преку која тој се обиде да научи што повеќе луѓе да пресметуваат со децимални броеви.

Денешните децимални броеви ги користел Џон Напиер, кој развил употреба на логаритми за извршување различни пресметки.

Современата децимална точка стана стандардна во Англија во 1619 година. Во многу земји низ светот наоѓаме примери за употреба на децималната точка (Melbourne Graduate School of Education, 2006).

Знакот *процент* (%) првпат се среќава во анонимен италијански ракопис од американскиот математичар Де Смит (De Smith) во 1898 година, кој го модернизирал и се користи денес.

1.3. Актуелни трендови и проблеми во разбирањето на математиката и на дропките во некои земји во светот

Брзите технолошки и научни достигнувања истакнаа голем број недостатоци во образовните системи ширум светот. Големи недостатоци се откриени особено во математичкото образование, кое потоа имаше верижни ефекти во други научни области. Многу од овие земји започнаа серија сеопфатни и секторизирани истражувања и иницијативи во различни области и дисциплини, кои ја ставаат областа/предметот математика во центарот. Истражувањата беа продлабочени во третманот на содржините на определени области, како на пример, во математиката за содржините во аритметиката, во алгебрата, во геометријата, дропките итн... Од овие истражувања е констатирано изразен недостаток на логично разбирање на дропките како една од најважните содржини во математиката, како резултат на низа пропусти од различна природа.

Поради овие проблеми, многу земји во светот, институции и меѓународни организации формираа тимови и имаат изготвено стандарди и стратегии поврзани со учењето на дропките, како што се: САД, Финска, Англија, Белгија, Австралија, Канада, Ирска итн. За некои ќе зборуваме понатаму.

САД (Стејт департментот за образование) ги разви Заедничките основни државни стандарди (Common Core State Standards Initiative, www.corestandards.org), кои се збир на висококвалитетни академски стандарди во математиката, уметноста и англискиот јазик/читање. Тие се наменети да опишат што ученикот треба да знае и да може да прави на крајот од секое одделение. Во образложението за изготвувањето на овие стандарди се наведува дека со години академскиот напредок на американските ученици опаѓа и „ниско сме рангирани во споредба со другите земји, особено по математика (Common Core State Standards Initiative, 2010). Тие го засноваат овој факт врз резултатите од меѓународните проценки како PISA, TIMS и во незадоволителниот успех на американските ученици на олимпијади и разни меѓународни натпревари.

Главната причина за неефикасноста на образовниот систем и незадоволителниот успех на учениците, според Стејт департментот за образование, е конфузијата на академските стандарди што варираат од држава до држава. Согледувајќи ги сите овие проблеми, во 2009 година започна изготвувањето на овие стандарди, во чие изготвување беа ангажирани федерални службеници, државни гувернери, државни и локални образовни службеници, раководители на државните јавни училишта, експерти. Нивното изготвување на централно ниво, како и нивното приспособување и одобрување од страна на државите одделно траеше долго, до 2013 година, кога започна нивната примена.

Развојот на овие општи стандарди потоа беше проследен со развој на стандарди за сите области за учење (предмети), вклучувајќи ги и оние за математика (Common Core State Standards for Mathematics). Заедничките основни математички стандарди се фокусираат на јасен сет на математички вештини и концепти. Учениците ќе учат концепти на поорганизиран начин и во текот на учебната година и низ одделенијата. Стандардите ги поттикнуваат учениците да решаваат проблеми од реалниот свет (Common Core State Standards Initiative, 2010).

Потоа, со цел целосно да се применат овие стандарди и да се вградат дропките во нив, во 2014 година беше изготвен документот „Наставата за дропки според Заедничките основни стандарди“ од авторот Хунг-Хси Ву. Овој документ дава проширен и детален опис за тоа кога, колку и како треба да се учат дропките за да се исполнат стандардите од Заедничките основни стандарди, почнувајќи од III до VII одделение (Wu, H.-H., 2014).

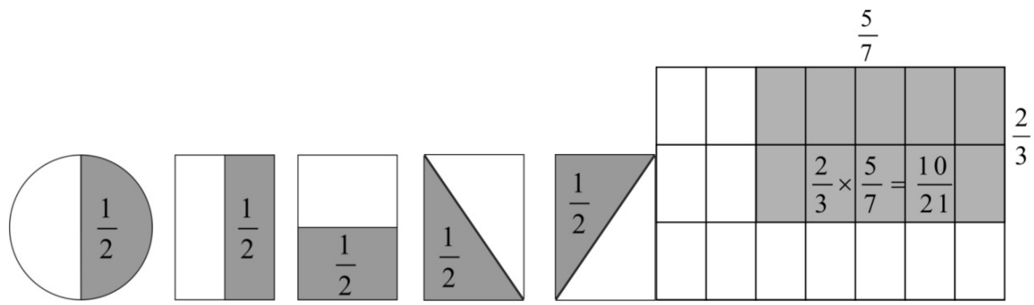
Овој документ (водич) го подели учењето на дропките во 2 фази:

Почетната фаза што започнува во III одделение и делумно во IV одделение е фаза во која концептот на дропката се разјаснува преку примери и репрезентативни модели.

Втората фаза започнува во IV одделение со формално учење на дропките и на аритметичките операции со нив и продолжува со пософистицираниот дел од дропките што се учи во VI и VII одделение.

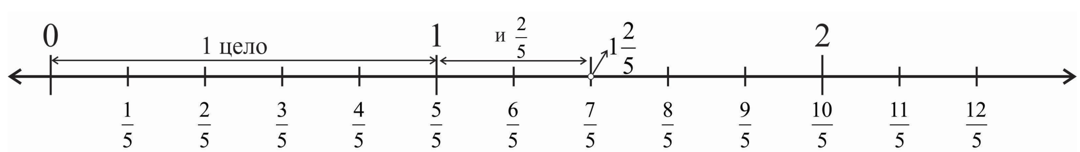
Овој документ, покрај тоа што ги содржи деталите за содржините за секое одделение посебно, е богат и со методички и дидактички совети за наставниците за тоа како тие треба да им бидат претставени на учениците во соодветните одделенија, на пример:

Користењето на кругот (пица) за разјаснување на дропките не е соодветно бидејќи тие не нудат толку голема флексибилност во делењето, па затоа е подобро да се користат повеќе правоаголни модели. Втора причина е што за разлика од правоаголникот, кругот не може да се користи за моделирање на множење на дропки.



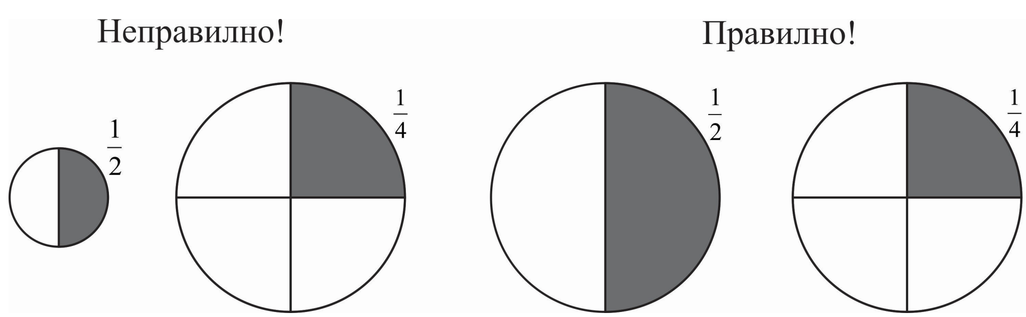
Слика 10: Правоаголните модели се посоодветни од кружните за разјаснување на дропките

За подобро разјаснување на неправилните дропки, кои претставуваат вредност поголема од 1 и како такви се означени како мешани броеви, пожелно е тие да се прикажуваат преку бројната линија така што на едната страна од неа (долу или горе) се прикажуваат цели броеви, а од другата страна дропки.



Слика 11: Претставување на неправилни дропки и мешани броеви на бројната права

Во однос на споредбата на дропките, од наставниците се бара внимателно да ги објаснат поимите „помало" и „поголемо". Треба да се забележи дека две дропки не може да се споредат освен ако не се однесуваат на иста форма и големина.



Слика 12: Дропките што се споредуваат мора да се однесуваат на иста форма и големина

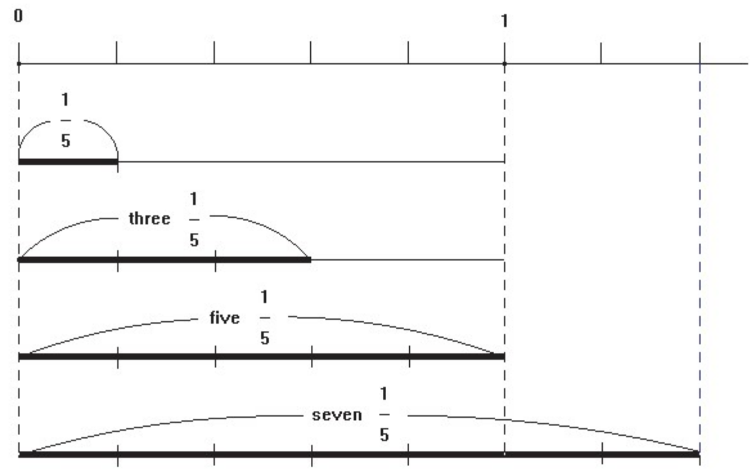
Дури и во **Финска** се среќаваат голем број проблеми во однос на учењето математика, воопшто, и особено во однос на дропките. Иако резултатите од тестот PISA донесоа задоволство и гордост во Финска, сепак, наставниците од универзитетите и од политехничките училишта се загрижени бидејќи, всушност, математичкото знаење на младите ученици драстично падна. Тие го засноваат ова врз податоците од TIMSS-тестот во кој финските ученици беа под просекот во геометрија и во алгебра. Исто така, имаат забелешки на PISA-тестот бидејќи овој тест не дава податоци за нивото на знаење во многу области од математиката, како што се: дропките, употребата на компјутери во решавањето дропки, решенија на линеарни равенки, волумен, алгебарски израз. Тестот PISA ни дава корисни информации за математичката писменост потребна за решавање едноставни проблеми, но овие вештини едноставно не се доволни во свет во кој математиката сè повеќе се користи (Matematiikkalehti, 2005).

Дури и во **Белгија** се спроведени низа истражувања во врска со елементарното учење на дропките, од што се утврди дека ова е постојан проблем. Во 2002 година, во фламанскиот (холандскиот) дел на Белгија, едно истражување покажа дека само 64 % од учениците од основните училишта ги совладале целите поврзани со дропките и со децималите. Овие цели се минималните барања што секој ученик мора да ги исполни на крајот од основното училиште. Истото ниво беше утврдено и во втората анкета што беше организирана во 2009 година. Овој недостаток на подобрување ги поттикна белгиските власти да се фокусираат на наставата на дропки, со акцент на подобрување на наставата за нив и зајакнување на личното знаење на наставниците за математика, и особено за дропките. Во една студија на Универзитетот во Гент се наведува дека тешкотијата во учењето се наоѓа и надвор од ученикот (т.е. кај наставникот, како тој развива идеи и упатства, дизајнот на часот во наставните материјали и тешкотиите во определени содржини), но и во проблемите поврзани со ученикот, како што се интелектуалните и визуелните оштетувања. Така, тешкотиите во учењето, главно, се резултат на лош дизајн на учење преку учебници и наставни помагала, а овој пристап се однесува на централната одговорност за проблемите во наставата и на наставниците (Van Steenbrugee, et al., 2015).

Со цел да се надмине оваа ситуација, белгиските власти подготвија низа проекти и стандарди преку кои се прават обиди да се подобри наставниот процес, вклучително и обуката и професионалното усовршување на наставниците, како и дизајнирањето на наставните програми и наставните содржини.

Во **Јапонија** учениците прво учат дропки во второ одделение, а во трето и во четврто одделение дополнително го проширувааат своето знаење за дропките и за операциите со нив.

Во IV одделение фокусот е да се развие разбирање за дропките, да се продолжи со неправилни дропки, да се претвораат во мешани броеви, а потоа да учат и за споредување дропки (секогаш со ист именител).



Слика 13: Моделирање на неправилни дропки и мешани броеви во Јапонија

Во V одделение се прави напор да се прошири разбирањето на дропките. Во ова одделение се изучува споредбата на дропките со различни именители, значењето на дропките, како и делење на броителот со именителот (3/4 = 3:4). Исто така, во V одделение јапонските ученици поврзуваат дропки со децимални и со цели броеви и обратно (Watanabe, 2006).

Во VI одделение учениците учат да ги извршуваат сите операции со дропки (собирање, одземање, множење и делење), дури и со различни именители.

Во текот на учењето на дропките се користат модели и практични прикази на дропки. Јапонија има ефикасен образовен систем и овој факт го докажуваат на сите меѓународни тестови како PISA, TIMSS PIRLS, каде што Јапонија е рангирана на врвот на листата (Watanabe, 2007).

1.3.1. Трендови во изготвувањето наставна програма од областа на математиката

Еден од најважните официјални документи што го определува начинот на кој се изучува математиката е наставната програма по математика.

Наставната програма по математика определува кои теми мора да се изучуваат, ги опишува образовните програми и нивната содржина. Истовремено, ги опишува целите, содржината и очекуваните резултати од учењето од математичкото образование (Ergović, 2014).

Наставната програма по математика дава преглед на структурата и содржината на различни официјални документи, а содржи и официјални упатства за наставата по математика. Ја појаснува улогата на централните и на локалните образовни власти во целиот процес на подготовка, одобрување и ревизија на овие документи.

Дополнително, се земаат предвид препорачаното времетраење на часовите по математика и националната политика за употреба на наставни материјали и учебници. Опишани се и примери на национални пристапи за изработка на учебници и национални стратегии за обезбедување конзистентност меѓу наставните програми и наставните материјали што се користат во наставата (EACEA, 2011).

Во повеќето европски земји, наставната програма по математика е дефинирана како официјален документ кој често е обврзувачки. Тој наведува кои теми мора да се изучуваат, ги опишува образовните програми и нивната содржина, како и материјалите за настава и за оценување што треба да се користат. Исто така, содржат и други информации, како што се: бројот на часови, редоследот на наставните содржини, наставните методи или посебните правила за настава.

Во процесот на планирање на секоја наставна програма по математика се носат одлуки во однос на филозофијата на наставата по математика, знаењето по математика погодно за возраста на учениците, пристапот кон наставата по математика и процесот на оценување.

Водечките филозофии и пристапи кон математичкото образование се разликуваат од земја до земја. Слично на тоа, се менува и степенот на контрола што го врши централното ниво преку релевантните национални образовни институции. На пример, во некои образовни системи, како што е оној во Холандија, централното (макро) ниво се занимава со ориентацијата на општествено-политичките и образовните цели, локалното (микро) ниво се занимава со деталите приспособувајќи ги на локалниот контекст, додека интерпретацијата на овие цели и задачи, шеми и форми на работа во училницата им се препуштени на наставниците и дизајнерите на текстот (Thijs & Van den Akker, 2009). Сосема спротивен пристап е забележан во образовните системи на многу други земји, како на пример, во Јужна Африка, каде што централните власти ги опишуваат и најситните детали во однос на секојдневното предавање од минута во минута на дадена тема.

Во оправдувањето зошто применуваат централизирани образовни системи, релевантните институции од овие земји често го наведуваат фактот дека наставниците се сметаат за неспособни да ја толкуваат наставната програма или нејзините цели и исходи или да ја трансформираат во единици за учење.

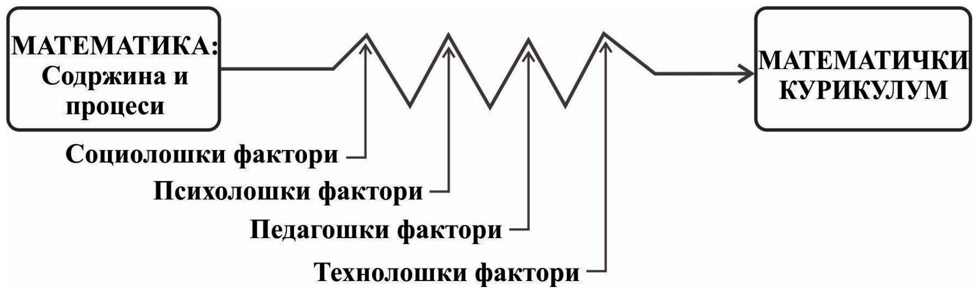
Ова не е точно бидејќи најчесто дизајнерите на учебници даваат инструкции и детали за наставниците. На наставниците им е потребна релативна автономија за да ги интерпретираат барањата/исходите од учењето за специфични одделенија (Long & Dunne, 2014).

Во огромното мнозинство европски земји, наставните програми се одобрени од националните образовни власти и се задолжителни документи. Обично, ги дефинираат целите, резултатите од учењето и содржината на предметот.

Според резултатите од екстерното оценување на знаењата и вештините на учениците и резултатите од интерното оценување на училиштата, заклучено е дека ревизијата на официјалните документи е неопходна во сите земји. Во последниве години, повеќето земји ги ревидираа своите наставни програми по математика. Како резултат на овие ревизии на програмата, се забележува дека акцентот е ставен на компетенциите, вештините и на примената на математиката во секојдневниот живот. Овој пристап заснован врз резултатите од учењето е поцелосен и пофлексибилен во начинот на кој функционира за да ги задоволи потребите на учениците.

Процесот на преглед осигурува дека содржината на предметот, целите на учењето и резултатите се во согласност со предизвиците на современото општество и вештините потребни на пазарот на трудот. Покрај тоа, наставната програма не е изолиран ентитет.

Целта на редовната ревизија на наставната програма по математика и следењето на наставата и учењето е да помогне да се потврди релевантноста на целите на учењето и да се обезбедат посакуваните резултати од учењето. Содржината на курсот, исто така, може да се промени и да се подобри. Бидејќи наставната програма е задолжителна во речиси сите земји, сите промени во неа, обично, се спроведуваат постепено, а во повеќето случаи тоа е неопходно.



Слика 14: Фактори што влијаат врз наставната програма (преземено и адаптирано од Robitaille & Dirks, 1982)

Подигнувањето на стандардот на образованието, вклучително и постигањата на учениците, е постојана цел на образовните реформи. Повеќето европски земји ја ревидираа својата наставна програма по математика во последната деценија. Една од главните причини за неодамнешните промени е усвојувањето пристап заснован врз исходите од учењето, кои се општодефинирани како знаења и вештини потребни за подготовка на младото лице за личен, социјален и деловен живот. Во Европската рамка на квалификации – EQF, резултатите од учењето се дефинирани како описи на она што ученикот го знае, го разбира и може да го направи на крајот од процесот на учење. Резултатите од учењето се опишани како знаење, вештини и компетенции. Наставните програми засновани врз резултатите од учењето се фокусираат на резултатите од процесот на учење (EUROPASS, 2017).

Резултатите од учењето имаат свои предности бидејќи тие:

- претставуваат јасни изјави за тоа што треба да бидат способни да прават учениците;
- им овозможуваат на наставниците поголема флексибилност во планирањето на часовите;
- ставаат помалку акцент на содржината што треба да се покрие, а повеќе на вештините/компетенциите што треба да се постигнат;
- им даваат поконкретни детали на родителите за постигањата на учениците;
- им овозможуваат на наставниците и на директорите поголема одговорност за стандардите на учениците;
- овозможуваат вклучување на повисоки нивоа на мисловни вештини;
- овозможуваат различни стилови на учење и начини на размислување.

1.3.2. Дропки во наставните програми во неколку различни земји

Во **САД** националните и државните стандарди ја преместија содржината на дропките од четврто во трето одделение. Ова беше направено како резултат на препораките од истражувачите, како и во тесна консултација со наставниците. Дропките се претставени преку различни начини, форми и контексти и ги рефлектираат идеите предложени од Жан Пијаже, Џером Брунер, Золтан Диенес, адаптирани од Ричард Леш, еден од основачите на проектот за рационален број (RNP) (Cramer, Wyberg & Leavitt, 2009). Прво, се предаваат единичните дропки (1/n), кои се разјаснуваат преку делење на еднакви делови на површини (на пример, круг или правоаголник) или на отсечка дефинирана во интервалот 0 и 1. Потоа процесот на предавање и учење дропки се фокусира на преминот од единични дропки во дропки од формата a/b (III одделение), за да продолжи со споредување дропки и операции со дропки (IV-V одделение).

Дропките во **Јапонија** се изучуваат од второ одделение. Прво се учат единичните дропки (1/n), а потоа се преминува на m/n дропки, кои се сметаат за m пати на единични дропки 1/n, на пример, 3/5 се толкува како 3 пати 1/5 (Bruce, Chang, & Flynn, 2013). Во трето одделение дропките се поврзуваат со децимални броеви, потоа се прикажуваат дропките и децималните броеви на бројна права, како и нивната споредба. Потоа се продолжува со собирање и одземање дропки со ист именител.

Во четврто одделение се продолжува со неправилни дропки кои се претвораат во мешани броеви, нивно собирање и одземање, секогаш со ист именител (Watanabe, 2007). Во петто одделение учениците учат собирање, одземање и споредба на дропки со различни именители, дропките се изразуваат како пати од броителот и од именителот (3/4 = 3 : 4); ги поврзуваат дропките со децимали и со цели броеви. Веќе во шесто одделение ги извршуваат сите операции со дропки (собирање, одземање, множење и делење) со кој било именител. За време на предавањето на дропките, се користат модели и практични прикази на дропките (Watanabe, 2006).

Во **Кореја** дропките се учат од трето одделение и има многу сличности со нивната настава во САД и во Јапонија. Прво, дропките се предаваат како броеви кои претставуваат делови од целина, делови од група или точки на бројна права. Овде, како и во Јапонија, дропките се поврзани со децималните броеви за да помогнат во зајакнувањето на врската меѓу нив. Во трето одделение се изучува споредба на дропки со ист именител, додека во четврто одделение се изучуваат различни видови дропки како мешани броеви, неправилни дропки; како и основната аритметика на дропките и толкувањето на дропките како коефициенти и како однос. Во петто и во шесто одделение се прошируваат знаењата за аритметиката на дропките, учењето за множење и делење на различни видови дропки. Исто така, во текот на процесот на учење дропки, врската меѓу дропките и децималите продолжува да се истражува и да се проширува и понатаму. Во Кореја дропките се предаваат преку проблеми и проблемски ситуации повеќе отколку во САД и во Јапонија, каде што секоја содржина за учење е покриена со четири или пет различни активности, од кои некои се фокусираат на концептуално разбирање, а некои на користење дропки во контекст на вистинскиот живот. Повеќето активности се придружени со прашања што ги поттикнуваат учениците да го објаснат својот мисловен процес кога даваат решение.

Во **Тајван**, како и во САД и во Кореја, дропките се предаваат од трето одделение кога се учи елементарното разбирање на поимот *дропки*, додека собирањето и одземањето се учат во четврто одделение кога се учи собирање и одземање на неправилни дропки и на мешани броеви со ист именител. Собирањето и одземањето дропки со различни именители се учи во подоцнежните одделенија. При процесот на објаснување на дропките се користат графички прикази, како што се фотографии/цртежи кои ги објаснуваат чекорите на постапките. Слично како во Кореја, учениците во Тајван мора да пишуваат реченици и математички објаснувања за да го разјаснат своето размислување додека решаваат проблеми и проблеми со дропка (Bruce, Chang, & Flynn, 2013).

Во **Канада** дропките најпрво се изучуваат во четврто одделение кога се објаснуваат нивното значење, споредба и еднакви дропки, за да се продолжи со односот на дропките со децималните броеви. Во петто одделение се учат правилни и неправилни дропки, мешани броеви, децимални броеви. Учениците треба да знаат да собираат и да одземаат дропки со ист именител; да ја опишат врската меѓу множење на дропки и множење на децимали. Овие поими и операции со дропки продолжуваат да се предаваат во шесто одделение, проширувајќи се со нови значења, како што е односот меѓу процентите, дропките и децималите. Сето ова е направено со инкорпорирање на различни соодноси, реални контексти, со користење конкретни материјали, цртежи и стандардна нотација на дропки (OAME, 2006).

Во **Германија** дропките се учат за првпат во трето одделение. Првично, германските ученици се запознаваат со единичните дропки (1/2, 1/4, 1/8) преку кои опишуваат делови од целина, како и делови од група или од збирка. Исто така, во трето одделение германските ученици учат и за споредба на дропките, како и за нивниот редослед по различни барања и критериуми. Во четврто одделение германските ученици учат да наоѓаат нови дропки еднакви (еквивалентни) на дадената дропка; за мешани броеви; учат и за односот меѓу дропките и процентите; поврзување и пренесување на дропки со децимали и со проценти. Тие учат и за аритметичките операции: собирање и одземање на децимали, употреба на дропки, децимали и проценти при решавање проблеми од секојдневниот живот, како што се купување, мерење итн. Во петто одделение знаењата за дропките се прошируваат со собирање и одземање дропки со ист именител, одземање (отстранување) на дропката од целиот број, неправилни дропки. Во следните одделенија учениците продолжуваат со периодични децимални броеви, множење и делење на дропки и дропки со цели броеви и обратно. Во седмо и во осмо одделение германските ученици прават врски меѓу дропки, децимали и проценти и ги применуваат овие броеви и операции со нив во решавање проблеми од секојдневниот живот. Се учи и за редоследот на извршување дејства во изрази што содржат дропки, децимални броеви, мешани броеви или проценти (Future School, 2021).

Во **Англија** уште во прво одделение учениците ги стекнуваат основните знаења за дропките, наоѓајќи половини и четвртини од дискретни и од континуирани величини со решавање илустрирани задачи со форми, предмети и големини. Тие треба да разберат дека ½ од 6 е 3 и да ја препознаат еднаквоста (еквивалентноста) меѓу дропките. Во трето одделение неединствените дропки со мали именители се појаснуваат преку илустрации каде што учениците собираат, споредуваат и наведуваат дропки со ист именител, додека во четврто одделение се учи за децимални броеви и за нивната споредба. Во петто одделение учениците изразуваат проценти, децимални броеви, дропки како соодноси – пропорции. Потоа учат за дропки поголеми од 1 (неправилни дропки и мешани броеви) со нивно претставување на бројната права. Во шесто одделение се продолжува со претворање дропки во дропки со ист именител. Во ова одделение учат за множење дропка со дропка, делење дропка со цел број. Тие ја разбираат дропката како делење на броителот со именителот и ја пресметуваат нејзината вредност (пример, 3/8 = 3 : 8 = 0,375). Во текот на процесот, учениците го зајакнуваат знаењето за дропки, децимали, проценти и операции со нив преку мешавина од сè покомплексни проблеми (Department for Education England, 2013).

Табела 3: Распределба на содржината „Дропки“ по одделенија во неколку земји

Содржини	Држава и соодветно одделение						
	САД	**Јапонија**	**Кореја**	**Тајван**	**Канада**	**Германија**	**Англија**
Значење на дропката	III, IV	II, III, IV	III, IV	III, IV	III, IV, V	III, IV, V	I, II, III, …
Еднакви дропки	IV, V	IV, V	IV, V, VI	IV	IV, V, VI	IV	II, IV, V
Споредување дропки	III, IV, V	III, IV, V	IV, V, VI	III, IV	IV, V, VI, VII	III, IV	III, IV, V
Собирање и одземање	IV, V	III, IV, V	IV, V	III, IV, V	V, VI	V, VI, VII	III, IV, V, VI
Множење	IV, V	V, VI	V, VI	IV, V	V, VI	VI, VII	VI, VII, VIII
Поделба	V, VI	V, VI	VI	VI	VIII	VI, VII	VI, VII, VIII
Неправилни дропки/мешани броеви	IV, V	IV, V, VI	IV, V, VI	IV, V	VI, VII, VIII	IV, V	V, VI, VII
Децимални броеви	IV, V, VI	II, IV, V	III, IV, V, VI	V, VI	IV, V, VI, VII	IV, V, VI, VII, VIII	IV, V
Проценти	VI, VII	V, VI	V, VI	VI	VII, VIII	IV, V, VI, VII, VIII	V, VI

Во **Македонија** од учебната 2015/2016 година по предметот Математика и природни науки се применува адаптирана верзија на наставните програми според Меѓународниот центар за испитни програми на Кембриџ (Велика Британија) и на Бирото за развој на образованието (тело на Министерство за образование и наука на Република Македонија) (БРО, 2015).

Во Македонија дропките се учат од второ одделение. Во второ одделение учениците учат за основните поими поврзани со дропките, каде што треба да се оспособат да препознаваат, да истакнуваат, да претставуваат и да пишуваат дропки преку делење форми, големини или група предмети, ставајќи односи меѓу цели големини и дропки. Во трето одделение се прави благ напредок во учењето на дропките, најпрво се води сметка за зајакнување на разбирањето и знаењето на дропките од второ одделение, знаења што се прошируваат и се применуваат во решавање на едноставни задачи, илустрирани со слики, предмети и различни контексти.

Во четврто одделение се посветува значење и внимание на различните начини на толкување, претставување, прикажување и забележување дропки, кои им се презентираат на учениците преку различни активности, илустрации и различни контексти. Сето ова прави ученикот да ја разбере дропката и како однос (пропорција) меѓу различни големини, фигури, предмети или нешта; тогаш дропките се претставени и како количник на броителот и именителот за да се продолжи со односот на дропките со децималните броеви, вклучително и цели броеви и мешани броеви, нивната еднаквост и споредба.

Во петто одделение знаењата за дропките се прошируваат со проценти и со неправилни дропки за кои учениците учат како да ги претвораат во мешани броеви и обратно. Потоа учат и множење на децимални броеви.

Во **Косово** дропките првпат се учат во трето одделение. Прво, учениците од III одделение учат за основните поими на дропки; еднакви дропки; споредување на дропки со ист именител или броител; како и собирање и одземање дропки со ист именител. Во наставната програма по Математика за трето одделение имаме многу кратка и многу општа листа на исходи од учењето за дропки, иако децата за првпат се запознаваат со нив. И покрај малиот број на овие резултати од учењето, дури и оние неколку, се дадени по нелогичен редослед (MASHT, 2019).

Во четврто одделение се појаснува значењето на именителот и броителот на дропките, претставувањето на дропките како дел од бројот; се појаснува како се добиваат (се образуваат) еднакви дропки преку проширување на дропките (претставено преку различни илустрации); определување дропки чија вредност е помала од 1, оние еднакви на 1, како и наоѓање (определување) дропки кои се еднакви на 1 (еден). И во наставната програма за четврто одделение се среќаваме со нелогично определување на исходите од учењето (MASHT, 2020).

За петто одделение во учебната 2021/2022 година за областа математика се користени старите наставни програми дизајнирани во 2005 година, според кои знаењата за дропките се прошируваат со собирање и одземање дропки со исти и со различни именители, како и со претворање на дропки со ист именител. Дропките во наставната програма за петто одделение се опфатени во четири поттеми во рамките на темата „Рационални броеви“: дропки (повторување и засилување на претходните знаења за дропките); собирање и одземање дропки со ист именител; собирање и одземање дропки со различни именители со нивно претворање во дропки со ист именител; дропката како дел од број (на пример, 2/3 од 12) (MASHT, 2005).

1.3.3. Цели во математичкото образование

Математиката се користи во голем број секојдневни активности (на пример: во медиумите, уметноста, архитектурата, биологијата, инженерството, компјутерските науки, финансиите, цртежи на разни предмети итн.). Иако нејзините примени се меѓу најразновидните, тие не може да се разберат без да се добијат некои основни познавања за нејзините теми бидејќи тие го прават ученикот свесен за улогата на математиката во секојдневниот живот, проширувајќи го неговиот светоглед (ASCAP, 2018). Математичкото образование има многу потенцијални цели, во таа смисла различни автори имаат различни мислења за кои цели треба да се определат.

Целите се важен фактор на системот за учење. Какви што се целите, такви ќе бидат и процесот и резултатите од образованието. Важно е да се обрне внимание на следниве прашања: Што може ученикот да направи по овој час? Како може да го користи своето знаење во секојдневниот живот? Што ќе прави на час за да го усвои дадениот материјал? (Драговић et al., 2011).

Општите цели за учење на математиката произлегуваат од општите цели на образовниот процес, чија основна цел е формирање поединци кои ќе ги разберат законите за развој на природата и на општеството и кои свесно ќе учествуваат во променливите средини во кои живеат. Меѓутоа, покрај општите цели, наставата по математика, исто така, има специфични цели кои се резултат на математичките карактеристики на науката, нејзината улога во современиот систем на науката, технологијата и производството и важноста на математиката за развој во современиот свет (Glavche et al., 2015).

Експертите за учење математика ги наведуваат овие специфични цели на учењето на математиката:

Една од главните карактеристики на математиката како наука се нејзината строгост и прецизност, користени од научните методи на другите науки за да се зголемат строгоста и прецизноста во овие учења. Затоа, оваа карактеристика на математиката како наука може да се смета како специфична цел на математиката.

Друга специфична цел на математичкото учење е формирање и развој на математичкото размислување, користејќи математички категории, концепти, теореми, аксиоми, преод (транзиција) кон математичка интуиција и разбирање на логиката на внатрешната математичка градба.

Третата специфична цел на математичкото учење е формирање на знаење и способност да се опишат и да се користат математички модели за изучување на предметите и на процесите (феномените) во природата. Математиката има такви можности да развие процес на размислување кај ученикот каква што не поседува ниту еден друг предмет. Во текот на процесот на учење математика, задачите се решаваат кога ученикот постигнува способност за логичко размислување како карактеристика на дедуктивното размислување.

Четвртата специфична цел на математичкото учење е развојот на геометријата, просторната застапеност и геометриската интуиција кај учениците. Просторната застапеност е неопходна кога се проучува стереометријата во која предметите се комплицирани и ученикот има тешкотии во решавањето на овие проблеми.

Математичкото знаење и вештини, главно, се однесува на квантитативни односи и просторни форми што се среќаваат насекаде во реалниот свет. Ваквото знаење може да се примени насекаде и секогаш кога се случуваат такви предмети или процеси.

Секоја примена на математичкото знаење вклучува три фази:

- Избор на факти од дадената област и нивно преведување на јазикот на математиката.
- Математичка обработка на овие факти.
- Преведување и формулирање на резултатите во изјавите кои обезбедуваат нови знаења во областа што се разгледува.

За ова, учениците треба да научат да го согледуваат математичкиот дел од проблемот и да го опишат на математички јазик. Потоа тие треба да ги обработуваат добиените информации математички и конечно да ги интерпретираат резултатите добиени во врска со проблемот што се разгледува.

Во процесот на обука на учениците, покрај добивањето информации за определени факти и законитости, исто така, тие прифаќаат факти и закони за развојот на природата и на оптштеството. Поврзувањето на научните сознанија со реалноста ги развива креативните способности на учениците и придонесува кон создавање реален поглед на околината. За ова, наставата по математика, покрај наставниот карактер, исто така, има едукативен карактер.

Како седма специфична цел се сметаат постигнување и зачувување на интересот на учениците во математиката. Без постигнување на оваа цел, тешко е да се размислува за реализација на општите цели на математиката за учење. Интересот и мотивацијата на учениците да учат математика може да се постигне преку примена на математиката на други предмети, нагласувајќи ги културните и образовните вредности на математиката (Малчески, 2010).

1.3.4. Општи цели на учењето математика во Косово

Областа на математиката има за цел учениците да се стекнат со модели на математичко размислување, со основни идеи за математички структури, како и да ги развијат своите вештини за пресметки и за решавање проблеми во секојдневниот живот. Преку областа на математиката, целта е интелектуален развој, способност за судење од различни перспективи, како и развој на имагинација и креативна способност.

Во основното образование, областа на математиката го промовира основното стекнување на математички поими, зајакнување и развој, препознавање на симболите, извршување на основните математички операции, мерење со нестандардни и со стандардни инструменти, обликот на фигурите и геометриските тела, собирање податоци, читање и прикажување едноставни графикони, како и воспоставување основа на знаење и позитивни ставови кон математиката.

Областа математиката има за цел да ги развие вештините и способностите на учениците за критичко размислување, развивање на нивната личност, развивање вештини за самостојно и систематско работење, промовирање и поттикнување на изградба на нови знаења со цел нивна примена и интеграција во други области и решавање на проблемски ситуации во секојдневниот живот.

Исто така, една од целите на областа математика е функционализација на знаењето преку негова интеграција со сите области, меѓунаставно поврзување и одржливо образование преку кое се совладуваат главните компетенции (MASHT, 2017b).

Организирањето на математичката содржина се врши преку одделни категории. Од I до V одделение ги имаме следните три категории:

- број, алгебра и функција;
- форма, простор, мерења и геометрија;
- обработка на податоци и веројатност.

Овие категории потоа се организираат во поткатегории и во наставни теми. Исто така, се градат специфични резултати за секое ниво на образование и за секое одделение.

1.4. Пристапи во учењето математика

1.4.1. Бихевиоризмот и конструктивизмот во математичкото образование

Со наставата и учењето математика се занимавале и се занимаваат многу дисциплини, на пример, когнитивната психологија, невронауката, биологијата, генетиката итн. Бидејќи процесот на учење е многу сложен, интервентните проекти и програми насочени кон подобрување на наставниот процес треба да се обидат да одговорат на сите фактори (променливи) вклучени во процесот на учење (Simplicio et al., 2020).

Првите обиди да се воведе методика на математика им ги должиме на Античките Грци. Токму Евклид (365 – 275 п.н.е.) се осмелил да го објасни математичкото расудување преку конзистентна мрежа од постулати, заклучоци, аксиоми и теореми. Речиси два милениуми академските кругови го користеа Евклидовиот модел на расудување за да го унапредат математичкото знаење. Сепак, Лобачевски (1793 – 1856) беше тој што ја собори непогрешливоста на Евклид со докажување дека петтиот од петте постулати на Евклид не е апсолутно точен (Handal, 2003).

Голем дел од литературата за математичкото образование се врти околу дијалогот меѓу конструктивистичките и бихевиористичките движења.

Бихевиоризмот се фокусира на манипулирање со надворешните услови на ученикот за да го модифицира однесувањето кое на крајот води кон учење. Во средина ориентирана кон однесувањето, завршувањето на задачата се гледа како идеално однесување за учење, а владеењето на основните вештини бара од учениците да преминат од основните кон понапредните задачи. Значи, учењето и подучувањето во бихевиористичка смисла е прашање на оптимизирање и манипулирање со средината за учење во насока на исполнување на строго дизајнирани и специфични образовни цели (Handal, 2003).

Беше кажано дека бихевиоризмот го нагласува моделот на настава фокусиран на процесот и на наставникот, пристап што бил широко распространет во дваесеттиот век. Бихевиористичкиот стил на настава во математичкото образование има тенденција да се потпира врз практики што го нагласуваат учењето напамет и врз меморирање формули, како начини на решавање проблеми и придржување кон процедури и вежби. Повторувањето се смета за една од најголемите алатки за стекнување вештини (Handal, 2003).

Конструктивизмот не е нов пристап кон учењето бидејќи датира од времето на Сократ. Долги години конструктивистичкиот пристап кон наставата се појавува во учебниците, во рамките на наставните програми и во литературата. Срцта на конструктивизмот е во развојот на активно учење, познато и како учење преку правење, искуствено учење, акциско учење, учење фокусирано на учениците, соработка со врсници и кооперативно учење (Prideaux, 2007).

Конструктивизмот, за разлика од бихевиористичките пристапи кон наставата и кон учењето, тврди дека знаењето не треба да се пренесува од една на друга индивидуа во образовните услови. За наставникот конструктивист, знаењето мора активно да се конструира бидејќи за него ученикот е ентитет со претходни искуства, кој мора да се смета за „суштество кое знае“. Затоа, учењето повеќе се гледа како приспособлив и искуствен процес отколку како активност за пренос на знаење бидејќи учениците се среќаваат со нови ситуации, тие бараат сличности и разлики наспроти нивните когнитивни шеми (Handal, 2003).

Овој тип ангажман бара училница што е многу различна од традиционалните авторитативни одделенија насочени кон наставникот, во кои наставникот стои на предниот дел од просторијата и ја насочува содржината што им се служи на учениците. Според Коб (Cobb, 1998), постојат две главни причини зошто конструктивизмот може да биде алтернатива на традиционалните пристапи и методики. Според првата причина, учениците се способни да решат широк спектар на математички проблеми бидејќи развиваат посложени и апстрактни структури. А според втората причина, преку градење на сопственото знаење, учениците забележуваат промена во сопствената перспектива бидејќи се способни да создаваат и да контролираат математичка содржина, а тоа влијае врз нивната мотивација (Prideaux, 2007).

Употребата на конструктивизмот во часовите по математика има многу варијации. Меѓутоа, заедничко за овие варијации е централната улога на ученикот во процесот на учење (Faulkenberry & Faulkenberry, 2006).

Во конструктивистичка смисла, учењето зависи од тоа како секој поединечен ученик гледа на определена ситуација и носи свои заклучоци, предизвикувајќи ги поединците да го определат своето знаење врз основа на нивниот начин на обработка на информациите и според сопствените верувања и ставови кон учењето. Затоа, конструктивизмот им дава признание и вредност на стратегиите за учење во кои учениците се способни да учат математика преку градење на лично и на општествено знаење. Конструктивистичките стратегии за учење вклучуваат повеќе рефлексивни активности, како што се истражувачкото и генеративното учење. Поконкретно, овие активности вклучуваат решавање проблеми, групно учење, дискусии и ситуациско учење (Handal, 2003).

Конструктивистичките пристапи се фокусираат на тоа што учениците може да направат за да го интегрираат новото знаење со постојното знаење и да создадат подлабоко разбирање на математиката. Секој пристап/филозофија го идентификува ученикот како активен учесник во процесот на настава и учење (Stiff, 2001).

Главниот развој на конструктивизмот како образовен пристап, главно, му се припишува на Жан Пијаже. Конструктивистичкиот модел на учење на Пијаже или когнитивниот конструктивизам започнува со проток на информации од сетилата на ученикот до структурата на неговиот мозок. Кога очекувањата или предвидувањата на ученикот не се совпаѓаат со личното искуство (т.е. набљудувањата), ученикот е во состојба на двосмисленост. Притоа, ученикот има три избори: (1) да не им верува на набљудувањата, (2) да остане неимпресиониран од едната или од другата алтернатива, (3) да го промени разбирањето така што набљудувањата одговараат на предвидувањата. Овој последен избор се нарекува когнитивно реСтруктурирање или значајно учење. Истражувањето на Пијаже покажа дека ако треба да се случи когнитивно реСтруктурирање, на ученикот мора да му се обезбеди повторлива, истражувачка, активност ориентирана кон истражување која ќе покаже дека неговото претходно разбирање повеќе не е корисно. Затоа, целта на учењето е да се стекне знаење и да се подложи на когнитивно реСтруктурирање, така што умот е постабилен и повеќе приспособлив кон светот (Pon, 2001).

Пијаже тврдеше дека учениците учат преку градење на сопственото разбирање додека извршуваат практични задачи што се соодветни за нивниот развој и со преминување од конкретни кон апстрактни идеи. Во врска со ова, во едно свое истражување Пијаже (1936) истакнува: „Бидејќи малите деца се поразвиени во однос на сензомоторната отколку во однос на вербалната логика, препорачливо е да им се дадат модели на дејствување врз кои може да се заснова натамошното учење... затоа, првичното учење на математиката треба да се поедностави преку сензомоторно образование...“ (UNESCO, 2008).

Концептуализацијата на конструктивизмот продолжува да се развива и денес за да го вклучи радикалниот и социјалниот конструктивизам. Радикалниот конструктивизам, предложен од Вон Гласерсфелд (Von Glasersfeld, 1987), ја прошири идејата за изградба на знаење до вистински радикални граници, наведувајќи дека знаењето е целосно субјективно бидејќи се конструира во главите на поединците врз основа на нивните уникатни лични искуства.

Социјалниот конструктивизам е филозофија развиена подоцна во 1960-тите, главно, поради напорите на Ернест, Голдин, Лерман, Бауерсфелд и Виготски (Ernest, 1994). Застапниците на социјалниот конструктивизам веруваат дека социјалните интеракции играат главна улога во градењето на разбирањето, изразувањето ја обликува мислата и дека математиката не е статично тело на знаење, туку општествено конструиран и еволутивен начин на размислување (Pon, 2001).

Истражувањата покажаа дека успешното учење се случува со активно реконструирање и ангажирање на когнитивните структури за да се приспособат новите информации. Оваа еволутивна, динамична форма на учење се нарекува конструктивизам и се покажа како успешна теорија за насочување на учењето и за наставниците и за учениците. Додека конструктивизмот има многу различни форми, основните сфаќања за конструктивизмот во математичкото образование може да се сумираат на следниов начин:

1. Математичкото знаење активно се конструира преку процес наречен рефлексивна апстракција.

2. Познавањето е еволутивно: когнитивните структури се приспособуваат на влијанијата од новите стимулатори со цел уредно да се приспособат на дразбите.

3. Конструктивизмот како наставна практика е тешко да се разбере во својата најчиста форма, но тој е корисен стил на педагогија што го става ученикот, а не наставникот во центарот на процесот на учење (Faulkenberry & Faulkenberry, 2006).

Друг став за конструктивизмот во математиката е оној на Lee V. Stiff (2001), претседател на NCTM (2000 – 2002). Според него, конструктивистичката настава по математика е начин на кој учениците на часовите се ангажираат и разговараат меѓу себе, каде што наставниците им дозволуваат на учениците да поставуваат прашања и да размислуваат за математиката и за математичките односи.

Реформски настроените наставници поставуваат проблеми и ги поттикнуваат учениците длабоко да размислуваат за можните решенија. Тие промовираат поврзување меѓу други идеи во рамките на математиката и на другите дисциплини. Тие бараат од учениците да дадат докази или објаснувања за нивната работа. Тие користат различни претстави на математички идеи за да поттикнат пошироко и подлабоко разбирање кај учениците. Овие наставници бараат од учениците да ја објаснат математиката.

Од учениците се очекува да решаваат проблеми, да ја применуваат математиката во ситуации од реалниот свет и да го прошират она што веќе го знаат. Понекогаш тие работат со други ученици. Понекогаш работат сами. Понекогаш користат калкулатори. Понекогаш користат само хартија и молив (Stiff, 2001).

Конструктивизмот се осврнува на тоа како учениците учат и што може наставниците да направат за да им го олеснат разбирањето на учениците. Според Стиф, постојат најмалку две дефиниции за конструктивизмот кои фрлаат светлина врз училишното учење математика.

Радикалниот конструктивизам е пристап кој вели дека знаењето не може да се пренесе во која било форма од родител на дете или од наставник до ученик, туку мора активно да се акумулира во умот од секој ученик на свој начин. Одговорноста за проширување на она што некој го знае или за конструирање ново знаење почива, првенствено, на ученикот и неговите напори да постигне разбирање.

Социјалниот конструктивизам е пристап кој тврди дека учениците најдобро може да го конструираат своето знаење кога тоа е вградено во социјален контекст. Така, интеракцијата меѓу наставникот и учениците се зајакнува кога вклучува поширока заедница на ученици, односно ученици кои работат заедно. Учениците си помагаат меѓусебно за да создадат побогати сфаќања за новите математички содржини. Еден вид социјален конструктивизам што се применува конкретно на математичкото образование тврди дека математиката треба да се учи со нагласување на решавањето проблеми; и тука интеракцијата треба да се одвива: (а) меѓу наставникот и учениците и (б) меѓу самите ученици; и дека учениците треба да се поттикнат да создаваат сопствени стратегии за решавање проблемски ситуации (Stiff, 2001).

Конструктивизмот имаше длабоки последици врз наставата. Педагошката примена на конструктивизмот беше широко прифатена во многу земји во светот, како што се: САД, Обединетото Кралство, Германија, Тајван итн... Обединетото Кралство беше првата земја која национално го наложи конструктивизмот во училиштата со објавување на Извештајот на Cockcroft во 1982 година и со Националната наставна програма во 1989 и во 1991 година.

Во однос на улогата на наставникот во конструктивистичкиот пристап, многу истражувачи веруваат дека квалитетите на наставникот се детерминанти за успешноста на учениците. Ова е уште позначајно кога се применува конструктивизмот. Знаењето, верувањата и постапките на наставникот влијаат врз успехот на учениците (Pon, 2001).

Истражувачот Sysan Hanley се обидува да ја сумира улогата на наставникот во одделението заснована врз конструктивизам. Според неа, наставникот конструктивист треба да стане еден од многуте извори од кои ученикот може да учи, а не да биде главен извор на информации; треба да ги вклучи учениците во искуства што ги предизвикуваат однапред смислените поими за нивното постоечко знаење; им овозможува на учениците да одговараат, да го поттикнат учењето и бара елаборација на првичните одговори на учениците; им дава на учениците малку време за размислување откако ќе постават прашања; го поттикнува истражувачкиот дух со поставување внимателни и отворени прашања; поттикнува внимателна дискусија меѓу учениците; користи когнитивна терминологија, како што се „класифицира“, „анализира“ и „создава“ за време на развојот на задачите; ги поттикнува и ги прифаќа автономијата и иницијативата на учениците; тој е подготвен да се откаже од контролата во училницата; користи сурови податоци и примарни извори, заедно со манипулативни, интерактивни физички материјали; ги поттикнува учениците да предлагаат причини за настани и за ситуации и за да ги предвидат последиците; го проширува учењето надвор од одделението; да не се одвојува признавањето од процесот на откривање; да се инсистира на јасно изразување од страна на учениците бидејќи кога учениците можат да го кажат своето разбирање, тогаш тие навистина научиле; го проширува учењето надвор од часовите (Hanley, 1994).

Наставниците, исто така, мора да имаат длабоко и темелно разбирање на наставната програма по математика, што им овозможува да забрзаат и да ги насочуваат напорите така што наставната програма е покриена. Ова знаење им овозможува на наставниците да знаат во кои прашања и насоки да се прошират и да се ориентираат. Наставниците, исто така, треба да бидат многу флексибилни на ризиците. Сите овие вештини им овозможуваат на наставниците да се справат со неочекувани прашања и дигресии, кои потоа им овозможуваат на учениците да ги поврзат своето претходно разбирање и релевантните искуства.

Во однос на верувањата на наставникот, Пирие и Киерен (1992) објаснија дека наставникот мора да ги има следните основни верувања за да го прифати успешно конструктивизмот:

- Сите ученици нема да можат да ја постигнат истата цел.
- Постојат многу начини да се достигне истото знаење.
- Секој има различно знаење.
- Учениците сами го градат своето знаење (Pon, 2001).

Не можеме да кажеме дека имаме чисти пристапи за учење. Повеќето од нив се мешавини, пресеци или дури и наследени остатоци на теории и различни историски и еволуциски пристапи кон образованието. Ова се случува и поради фактот што учењето е многу сложен процес кој вклучува низа интерпретации на повеќе теории.

Меѓутоа, во мноштвото теории и пристапи кон учењето, преовладуваат бихевиористичките и конструктивистичките теории. Се смета дека тоа повеќе се должи на фактот што овие два пристапа успеале да ја задржат својата историска основа, да ги збогатат своите теоретски и практични аспекти, како и да се приспособат и да еволуираат со текот на времето.

Бихевиоризмот е повеќе метод на психологија кој се фокусира, првенствено, на набљудуваните однесувања кај луѓето и на тоа какви надворешни стимулатори влијаат врз тие однесувања. Овој метод наведува дека ако однесувањето добие позитивно засилување, однесувањето ќе биде условено и повторувано, ако однесувањето добие негативно засилување, однесувањето нема да биде условено и ќе престане. Во наједноставна смисла, бихевиоризмот е концептот „стап и морков“.

Всушност, ова е и основата на бихевиористичкиот пристап кон учењето, кој го поистоветува учењето со промени или во формата или во зачестеноста на забележливите перформанси. Учењето се постигнува кога ќе стекнеме соодветен одговор по презентирањето на специфичен стимул од околината. Клучните елементи на бихевиористичкиот пристап се стимулот, одговорот и односот меѓу нив. Главната грижа е како се создава, се зајакнува и се одржува поврзаноста меѓу стимулот и одговорот. Ученикот се карактеризира како пореактивен на промените во условите (стимулатори) во околината во споредба со преземањето активна улога во откривањето на околината.

Од друга страна, конструктивизмот е теорија што го поистоветува учењето со создавањето знаење од искуството. Конструктивистите веруваат дека умот го филтрира влезот од светот за да произведе своја единствена реалност. Конструктивистите не го негираат постоењето на реалниот свет, но тврдат дека она што го знаеме за светот произлегува од нашите толкувања на нашите искуства. Луѓето создаваат знаење наместо да го стекнуваат. Инаку, може да кажеме дека конструктивизмот е понова теорија и како таква санираше низа слабости и недостатоци на други пристапи, но во исто време позајми и многу други подобри и позитивни елементи од нив.

Со оглед на тоа што живееме во свет кој постојано се менува и со трендови на отвореност и слободно движење на луѓето, знаењето, капиталот, образованието воопшто, и особено во нашата земја, се оспорува од сите аспекти. Основниот елемент на денешното општество е поединецот. Пристапот кој најмногу е насочен кон индивидуата е конструктивистичкиот пристап и како таков може да се смета за најперспективен во денешно време. Се разбира, тоа не значи дека конструктивизмот се занимава само со поединецот, тој ги препознава и ги цени групните активности (социоконструктивизам), но секогаш во функција на исполнување на соодветните лични компетенции на поединецот.

1.4.2. Пристап заснован врз дисциплина наспроти интегриран пристап кон учењето!?

Во образованието постои долга дебата меѓу учењето засновано врз дисциплина и врз интегрирано учење. Фокусирањето на една дисциплина е најтрадиционалниот пристап. Секој предмет се учи изолирано (на пример, Математика). Од друга страна, интегрираниот пристап создава искуства за учење кои бараат вклучување на повеќе од една дисциплина или предмети во справувањето со интердисциплинарна задача или единица (Gibbs, 2018).

Интегрираниот пристап не само што треба да се сфати како образовна филозофија, туку е и соодветен начин да се разбере светот. Кога ќе дипломираме, ќе работиме со луѓе од сите дисциплини, па зошто тогаш школувањето би било поинаку? Интегрираниот пристап ја нагласува важноста на соработката, а идејата за соработка има за цел да создаде подобра целина. Некои од клучните карактеристики на интегрираната настава (учење) се:

- Интегрираната настава, главно, е фокусирана на решавање проблеми.
- Интегрираната настава истражува и користи информации ефективно.
- Интегрираната настава им овозможува на учениците да интегрираат идеи и искуства и да ги применат за да формулираат нови ситуации за учење.

- Креативноста, приспособливоста, критичкото размислување и соработката се клучните карактеристики на интегрираното учење.

- Интегрираниот пристап лесно се приспособува на учење со различни стилови на учење, теории и повеќекратна интелигенција (HallMark, 2020).

Придобивките од интегративниот пристап се јасни. Со спојување и обработка на теми, учениците работат заедно, создавајќи усогласен и интегриран пристап. Во презентацијата на интегративниот пристап од страна на јавното училиште HallMark, кое широко го применува интегрираниот пристап за учење, се вели:

- Интегрираниот пристап посветува посебно внимание на зголемување на разбирањето, владеењето и примената на општите концепти.

- Интегрираниот пристап овозможува подобро разбирање на содржината.

- Интегрираното учење поттикнува активно учество во релевантни искуства од реалниот свет.

- Интегрираното учење служи како врска меѓу различните наставни дисциплини.

- Интегрираното учење ги развива вештините на највисоко ниво на размислување.

- Интегрираното учење активно учествува во откривање и развивање на јаките страни на учениците (HallMark, 2020).

Во однос на предностите на интегрираниот пристап во процесот на настава и учење, Гибс нагласува:

- Интегрираниот пристап им овозможува на учениците да воспостават врски за учење меѓу различни предмети или области. Овој пристап е пореално искуство за учење. Во „реалниот живот“, по природа, проблемите ретко се толку затворени што може да бидат дел од само еден предмет во училиштето.

- Интегрираниот пристап кон учењето им нуди на учениците сеопфатни организациски идеи и концепти што им помагаат да развијат поширока слика и да не ја гледаат наставата епизодно. Наместо тоа, тие почнуваат да го интернационализираат процесот на воспоставување врски меѓу дисциплини или теми во рамките на една дисциплина.

- Интегрираното учење им дава можност на учениците да развијат и да проценат различни перспективи што произлегуваат не само од интерпретациите на различни луѓе туку и од различни дисциплински пристапи, определен проблем или ситуација.

- Додека предавањето фокусирано на една дисциплина обезбедува длабочина, интегрираниот пристап додава широчина во процесот на учење и длабочина на разбирањето што доаѓа откако нешто ќе се разбере во поширок контекст. Обезбедува длабочина во ширина.

- Интегрираниот пристап ги зајакнува вештините и знаењето од содржината бидејќи интеграцијата се потпира врз примена на вештини и содржина. Кога учениците ги применуваат своите вештини, тие не само што подобро ја гледаат важноста на вештините, туку и ги практикуваат и ги ставаат понатаму во „делот“ наменет за вештини. Потоа ова го поддржува создавањето одржливо знаење.

- Успехот во примената на вештините во сложен и интегриран проект води до општо чувство за ефикасност. Наместо ученикот едноставно да има задоволство да совлада определена вештина, тој чувствува дека, всушност, решил интересен проблем или добро претставил сложена тема.

- Интегрираниот пристап поддржува употреба на читање, пребарување, пишување, зборување и слушање во сите дисциплини бидејќи е јасно дека способноста за добро истражување и комуникација се клучните животни вештини во речиси секоја избрана кариера.

- Интегрираниот пристап кон учењето им овозможува на наставниците да ги градат основните вредности на училиштето на природен и применлив начин, со што се подобрува искуството за учење со вклучување на социјални/емоционални сили и развој на карактерот (Gibbs, 2018).

Од почетокот на дваесеттиот век, се појавија две спротивни тенденции во наставата по природни науки: едната беше позната по диференцијација на науките, другата – напротив, се обидуваше да ги комбинира изолираните науки во единствен систем на знаење, па оттука и во интеграција.

Различни идеи за интеграција се проширија во Европа и во Америка многу подоцна по Втората светска војна. Првите интегрирани проекти за научно образование беа создадени во Обединетото Кралство. Подоцна, наставата за интегрирани природни науки се прошири во училиштата во Холандија и на другите континенти, вклучувајќи ги Австралија, Азија, итн., и тие се познати како: Проект за наставни програми за биолошки науки, Студија за основни науки итн. (Abache, 2018).

Интеграцијата на наставата по математика и природни науки може да произлезе од тесната врска меѓу овие области. Науката обезбедува конкретен контекст за примена на математички концепти; а математиката им овозможува на учениците да го продлабочат разбирањето на научните идеи, обезбедувајќи средства за дефинирање и за објаснување на научните односи, изразени преку променливи, равенки, графикони итн. (Mestrinho & Cavadas, 2018).

Математиката е наука чиј универзален јазик им помага на учениците да разберат и да дејствуваат според реалноста во која живеат. Математиката се користи во голем број секојдневни активности (на пример, во медиуми, уметност, архитектура, биологија, инженерство, компјутерски науки, финансии, цртежи, ...). Иако нејзините примени се многу разновидни, учениците ја разбираат улогата на математиката во секојдневниот живот проширувајќи го својот поглед на светот. Различните ситуации што може да се земат предвид во математиката покажуваат колку е тесно поврзана со други области. Преку математиката ученикот може да толкува количини со помош на броеви и алгебра, да толкува форми, простор користејќи геометрија и мерење, да толкува случајни појави користејќи статистика и веројатност (ASCAP, 2018).

Традиционално, уметноста и науката се третираат како две различни дисциплини, но кога се набљудуваат внимателно, нивното влијание една врз друга е јасно.

Ликовната уметност се користи за документирање на природниот свет илјадници години наназад, од цртежи на животни во пештери што им помагаат на модерните истражувачи да ја разберат фауната од античко време, до слики од вековни експерименти кои покажуваат како се изведувале. Еден од најпознатите примери за поврзаност меѓу уметноста и науката е Леонардо да Винчи. Познати се многу инженерски дела, како и проекти оставени на хартија кои докажуваат дека тој не бил помалку вешт и како пронаоѓач и како истражувач. На прашањето како може да биде толку вешт во уметноста и во науката, одговорот е дека тој никогаш не ја препозна интелектуалната поделба меѓу неговата работа како уметник и како научник (Dorfman, 2019).

Живееме во момент и во свет со меѓусебно поврзување и интеграциски трендови во сите сфери на животот и работата. Како таков, тој го предизвикува образовниот систем.

Исто така, од историјата и биографијата на многу познати личности и успешни компании како Леонардо да Винчи, Ајнштајн, Стив Џобс, Бил Гејтс, Илон Маск... разбираме дека една од причините за нивниот успех е во тоа што умеат да поврзат и да интегрираат различни знаења и области (науки) со цел решавање конкретни проблеми.

Затоа, во многу земји имаме напори да дизајнираме образовни системи и наставни програми со интегративен пристап, од кои некои ќе бидат предмет на наша анализа.

1.4.2.1. STEM-програма (Science, Technology, Engineering and Math)

Една од ефективните програми за интеграција е иницијативата STEM (Science, Technology, Engineering and Mathematics) дизајнирана од Националната научна фондација – NSF во САД. STEM се однесува на области за кариера што ги интегрираат знаењата и вештините од овие области. Оваа програма се протега надвор од САД до Австралија, Кина, Франција, Јужна Кореја, Тајван и Обединетото Кралство.

Во раните 2000 години во САД, дисциплините на науката, технологијата, инженерството и математиката станаа поинтегрирани по објавувањето на неколку истражувачки извештаи што ги истакнуваат врските меѓу зголемениот просперитет и работните места со знаење за наука, технологија; како и по континуираната иновација која се занимава со социјални проблеми.

Американските ученици и студенти не постигнаа задоволителни достигнувања во дисциплините СТЕМ во иста мера како и нивните колеги од други земји. Извештајот предвидува страшни последици доколку земјата не може да се натпреварува во глобалната економија како резултат на слабо подготвената работна сила. Така, фокусот беше на истражување по математика и технологија, економска политика и на образованието. Овие области се сметаа за клучни за одржување на просперитетот на САД.

Наодите од меѓународните студии, како што се TIMMS и PISA, дополнително ја зголемија загриженоста за ефикасноста на образовниот систем на САД. Овие резултати покажаа дека САД имаа релативно висок процент на ученици со ниски резултати и дека земјата се рангираше на 21. место (од 30 земји) во проценката на научните вештини и знаења.

Овие меѓународни проценки (истражувања) поттикнаа дискусии за образовниот систем и за потребите на работната сила во Соединетите Американски Држави. Управувачката група на дводомниот Конгрес беше формирана за развој на проектот STEM, под слоганот:

„Нашата економија заснована врз знаење е водена од континуирана иновација. Основата на иновацијата лежи во динамична, добро мотивирана и добро образована работна сила, опремена со STEM-вештини.“

Со цел проектот STEM да биде што е можно поефикасен, првично беа спроведени неколку студии за да се идентификуваат потребите на училишните системи, како и за да се насочи развојот на соодветни решенија. Овие студии забележаа дека американските наставници не беа сигурни во последиците на STEM, особено кога целта беше научна и технолошка писменост за сите ученици. Наставниците немаа детално знаење за кариерата во СТЕМ и како резултат на тоа не беа подготвени да ги водат учениците во тие области.

Сето ова ги поттикна американските гувернери да бараат методи за насочување на уписот во средно училиште на учениците со основни знаења и компетенции за STEM за успех во постдипломското образование и вработување. Затоа, Здружението на државни гувернери додели грантови на многу држави за развој, адаптација и примена на активностите од проектот STEM.

Искуствата за образование на STEM може да се користат во различни услови, во училиштата и во организациите. Во извештајот за 2012 година, STEM беше дефиниран како:

„Наставата и учењето во областите на науката, технологијата, инженерството и математиката кои, обично, вклучуваат образовни активности на сите нивоа на образование, од предучилишна возраст до постдокторски студии – во формални (на пример, во училница) и неформални (на пример, програма по училиште)“ (Hallinen, 2024).

1.4.2.2. Проектот STEAM (Science, Technology, Engineering Art and Math)

Додавањето „уметност“ во STEM за создавање STEAM е вклучување на креативно размислување и применета уметност во реални ситуации.

Уметноста е откривање и создавање подобрени начини за решавање проблеми, интегрирање принципи или презентирање информации. На пример, архитектите користат инженерство, математика, технологија, наука и уметност за да создадат прекрасни згради и структури.

STEAM е образовна дисциплина чија цел е да предизвика вечен интерес и љубов кон уметноста и науката кај децата уште од раното детство. Науката, технологијата, инженерството, уметноста и математиката се слични области на студии по тоа што сите вклучуваат креативни процеси и никој не користи само еден метод за истражување и за откривање. Учење релевантни вештини, на барање, што ќе ги подготви учениците да станат иноватори во светот што постојано се развива. Тоа е од суштинско значење не само за иднината на самите ученици туку и за иднината на земјата.

STEAM им овозможува на наставниците да користат проектно учење што ја надминува секоја од петте дисциплини и поттикнува инклузивна средина за учење во која сите ученици може да се вклучат и да дадат свој придонес. Во споредба со традиционалните модели на настава, наставниците што ја користат рамката STEAM комбинираат дисциплини, користејќи синергија меѓу процесот на моделирање и содржината на дисциплината и науката.

„Овие паралелни патеки на науката и уметноста ги привлекуваат едни кон други потребите за образование во XXI век". Застапниците на STEAM-образованието тврдат дека овој пристап е особено важен во научните дисциплини бидејќи „Идните генерации на научници ќе треба да развијат комуникациски вештини преку традиционалните средства за пишување и за зборување, но исто така и повеќе уметнички средства, вклучувајќи илустрација, анимација, видео, цртани филмови, занаети, модели (Lathan, 2024).

1.4.2.3. Интегративни пристапи во курикуларната рамка во Косово

Еден од основните принципи на курикуларната рамка во Косово е интегрирана и кохерентна настава и учење. Овој принцип промовира холистичко учење што ја одразува меѓусебната поврзаност и меѓузависност на природата и светот создадени од човекот со знаење и информации што ги имаат учениците за нив.

Курикуларната рамка за „предуниверзитетско образование"[2] е организирана во наставни области. Наставната област интегрира еден или повеќе предмети или модули. На пример, областа природни науки вклучува биологија, физика и хемија. Математиката е предмет и област за себе. Математиката во курикулумот е претставена како наставна област и предмет (MASHT, 2017a).

Курикуларната рамка за предуниверзитетското образование предвидува процесот на учење да се одвива на интегриран начин, поврзан со работата и со секојдневниот живот на децата, овозможувајќи им правилно да го разберат нивниот однос со природната и со социјалната средина.

Курикуларната рамка во Косово е заснована врз компетенции, кои се интегриран и кохерентен систем на применливи и пренесливи знаења, вештини и ставови што ќе им помогнат на учениците да се соочат со предизвиците на дигиталната ера, пазарната економија и слободите засновани врз знаење во свет на меѓузависни односи.

---

[2] „Предуниверзитетското образование" во Косово функционира според „Законот за предуниверзитетско образование во Република Косово", бр. 04/L-032, (2011), а е организиран од „Курикуларната рамка за предуниверзитетско образование на Република Косово" (2017).
Предуниверзитетското образование во Косово се состои од 3 формални нивоа, кои се усогласени со меѓународниот систем за класификација на образованието ISCED (International System for Clasification of Education), составен од УНЕСКО.
Ниво 0 и 1. Ниво 0, Образование во раното детство, опфаќа образование на деца од раѓање до 5-годишна возраст; и образование од предучилишна возраст за деца на возраст од 5 до 6 години. Ниво 1, Основно училиште, од I до V одделение и вклучува деца на возраст од 6 до 11 години.
Второ ниво, средно и ниско училиште, опфаќа деца од VI до IX одделение, односно на возраст од 12 до 15 години.
Трето ниво, повисоко средно училиште, ги вклучува одделенијата од X до XII (MASHT, 2017a).

За секоја област од наставната програма, подготвени се методолошки упатства што ги учат наставниците како да им помогнат на учениците, преку интегриран пристап кон учењето, да воспостават врски меѓу теми со животни ситуации, како и теми од други наставни области (MASHT, 2017a).

1.4.3. Средини за учење

Наставата и учењето се „сретнуваат“ во средина за учење.

Средина за учење се смета дека е сè што постои и што се случува во училницата, од изгледот на училницата, инвентарот, дисциплинската и климата за учење, практиките, дизајнот на училишната зграда, односот меѓу училницата и училиштето, како и што се случува во поширок социокултурен контекст (OECD, 2016a).

Средините за учење се однесуваат на различни физички места, контексти и култури во кои учениците учат. Бидејќи учениците може да учат во различни средини, како што се училишни и вонучилишни средини, терминот често се користи како алтернатива на училницата, која има поограничени и традиционални значења, како што е просторија со редови на клупи и столови, и табла (Glosary of Education Reform, 2013).

Според овој портал, терминот „средина за учење“ ја вклучува и културата на училиштето или одделението, нејзиниот етос и клучните карактеристики, вклучувајќи го и начинот на кој поединците комуницираат и дејствуваат едни со други, како и начините на кои наставниците може да организираат образовни средини за да се олесни учењето. На пример, преку создавање училници во релевантни природни екосистеми, групирање клупи на посебни начини, украсување ѕидови со наставни материјали или користење технологии. Бидејќи квалитетите и карактеристиките на средините за учење се определени од различни фактори, училишните политики, раководните структури и други карактеристики, исто така, може да се сметаат за елементи на „средината за учење“.

Наставниците, исто така, може да тврдат дека средините за учење имаат директни и индиректни ефекти врз учењето на учениците, вклучувајќи ја нивната посветеност на она што се учи, нивната мотивација за учење и нивното чувство за благосостојба, припадност и лична безбедност. На пример, средина за учење исполнета со сончева светлина и стимулативни едукативни материјали ќе се смета за попогодна за учење отколку дебели простори без прозорци и декор, како и училиштата со помалку случаи на лошо однесување, неред, малтретирање и незаконски активности. Исто така, начинот на кој наставниците комуницираат со учениците и како учениците комуницираат едни со други може да се сметаат за аспекти на средината за учење (Glosary of Education Reform, 2013).

Постои општ консензус дека средините за учење влијаат врз ангажманот и врз постигнувањата на учениците, како и врз желбата на наставниците да продолжат да работат во училиштето (OECD, 2016a).

Децата се раѓаат со предиспозиции и способности за учење и затоа е неопходно да се создадат оптимални средини во кои детето ќе може што повеќе да се развива. Голем дел од нивниот развој се заснова врз лични искуства со средината каде што живее детето. Квалитетот на односите што децата ги имаат со важните луѓе во нивниот живот, како и интеракциите и чувствата што ги носат овие односи, всушност, влијаат врз создавањето на архитектурата на мозокот.

Срeдините за учење во голема мера влијаат врз когнитивниот, социјалниот, емоционалниот и физичкиот развој на детето. Создавање безбедна и стимулирачка физичка, ментална и социјална средина која нуди различни материјали, задачи и ситуации соодветни на нивото на развој, каде што наставникот го поддржува учењето на детето преку индивидуално и групно истражување, преку игра, користење на различни ресурси и интеракција меѓу децата и возрасни (Чекор по чекор, 2011).

Во презентацијата на Факултетот за образование (College of Education) IOWA University (https://education.uiowa.edu/) за средини за учење наведува дека еден од најважните аспекти на безбедна и позитивна средина за учење е односот меѓу наставникот и ученикот. Кога учениците разбираат дека нивните наставници сакаат да бидат колку што може најдобри, учениците се чувствуваат удобно да поставуваат прашања, да прават грешки и да преземаат ризици за да научат нешто ново. За да изгради вакви односи, наставникот треба да биде заинтересиран за силните страни и интереси на секој ученик, како и за нивните борби и фрустрации.

Создавањето заедница и култура во одделението останува уште еден неопходен аспект кога се создава безбедна средина за учење. Учениците треба да разберат што им е заедничко со нивните соученици. За време на секојдневните активности, учениците треба да бидат дел од заедничкиот напор за учење, споделувајќи ги своите силни страни и охрабрувајќи се едни со други. Ова ги тера учениците да се потпираат едни врз други, а исто така ги прави одговорни за нивните средини за учење.

Друга важна одговорност на наставникот е да развие средина за учење каде што учениците ќе се чувствуваат мотивирани да учат во безбедна училница. Овде е важно наставниците да ја истакнат внатрешната мотивација во училницата за да ги ангажираат учениците преку пофалби, позитивно засилување и награди за успех и одлично однесување.

Училницата заснована врз соработка наместо врз конкуренција повеќе придонесува за создавање емоционално безбедна средина за учење. Целта на учењето треба да биде соработка, а не натпревар. Со стимулирање на конкурентна средина, на учениците им се испраќа порака дека мора да победат по секоја цена. Ова го намалува чувството на сигурност, наставниците мора да бидат фер во секоја ситуација, барајќи од децата да ја препознаат меѓусебната компетентност, труд и работа.

Во заедничко опкружување, учениците знаат дека нивниот придонес за другите е важен и дека заедно создаваат средини што им даваат чувство на припадност. Наставниците секогаш треба да наоѓаат начини како децата да се поддржуваат едни со други и треба да интервенираат кога детето е исклучено од туѓите активности (Чекор по чекор, 2011).

Во студијата „IDEA“ (https://www.ideaedu.org/), климата во училницата се посматра како широка конструкција, составена од чувствата на учениците спрема наставникот и спрема врсниците. Ова истражување конкретно се фокусира на важноста на односот ученик – ученик. Иако односот наставник – ученик игра клучна улога во климата во училницата, односот ученик – ученик, исто така, може да придонесе бидејќи наставата и учењето не се последица само на интеракцијата меѓу наставникот и учениците туку и меѓу самите ученици. Наставниците играат клучна улога во моделирањето позитивни лични интеракции со тоа што ќе покажат поддршка за овие однесувања во училницата (Barr, 2016).

Според официјалната веб-страница на Министерството за образование на Нов Зеланд (https://www.education.govt.nz), средините за учење се состојат од овие елементи:

Социјални – луѓето во околината и интеракцијата меѓу нив.

Педагошки – наставна практика и учење.

Физички – имот, технологија и други ресурси.

Кога средините за учење се добро дизајнирани со горенаведените елементи, тие може да придонесат за училиштен успех и благосостојба.

Во однос на односот на наставата и учењето со физичката средина, се истакнува фактот дека е важно физичкиот дизајн на училишните простори да реагира и да биде усогласен со начинот на кој се одвиваат наставата и учењето во секое училиште. Кога средините за учење се добро дизајнирани, тие може да придонесат за училиштен успех и за благосостојба (MENW, 2022).

Типично, социјалните, физичките, психолошките или културните фактори вклучени во средините за учење длабоко влијаат врз способностите за учење на учениците. Ако атмосферата за учење не е погодна за стекнување нови знаења или вештини, ќе биде тешко за учениците да останат ангажирани или заинтересирани (Movchan, 2024).

1.5. Оценување на постигањата на учениците по математика на Косово

Оценувањето се врши преку употреба на разни алатки и процедури за прибирање, толкување и анализа на податоци во корист на подобрување на наставата и учењето.

Преку проценување на постигањата и индивидуалниот развој, се препознаваат придобивките и насоките од кои на секој ученик му се потребни помош, поддршка и мотивација. Подоброто познавање на учениците и на нивните достигнувања им помага на наставникот и на родителот да работат повеќе во оние насоки што го попречуваат неговиот натамошен напредок.

Постојат два главни типа на оценување: формативна проценка и сумативна проценка.

Формативна проценка, тоа е тест без оценување што се користи пред или за време на часовите за да им помогне во планирањето и во дијагнозата. Се одвива пред или за време на наставата. Целите на формативното оценување се за водење на наставникот во планирање и подобрување на наставата и за да им помогне на учениците да се подобри учењето. Со други зборови, формативната проценка помага во формирањето на наставата (Woolfolk, 2011).

Сумативна проценка, тоа е тест што ја придружува наставата, еден вид проценка на постигнувањата. Се прави на крајот од наставата. Неговата цел е да им овозможи на наставникот и на ученикот да го знаат степенот на стекнатото знаење. Завршниот испит е класичен пример за сумативно оценување (Woolfolk, 2011).

Повеќето образовни системи применуваат два типа оценување: внатрешна проценка и надворешна проценка.

Внатрешната (интерна) проценка се врши на ниво на училиште/одделение од страна на наставниците и на училишните тела. Ова оценување се организира за повеќе цели: напредок во наставата и учењето, препознавање на тенденциите и талентите на учениците итн. Главниот фокус на внатрешното оценување треба да биде поддршка на учењето на учениците кон исполнување на компетенциите и тоа најдобро се постигнува со комбинирање на формативното и на сумативното оценување.

Надворешната (екстерна) проценка е стандардизирана проценка за мерење на степенот на постигнување на резултатите од учењето и совладување на компетенциите на крајот на определено ниво на образование. Проценката е организирана од страна на централните или локалните власти кои управуваат со училиштата или со образовниот систем. Екстерната проценка е стандардизирана проценка за мерење на нивото на постигање на целите на учењето и поседување компетенции на крајот од определеното ниво на образование (MASHT, 2017a).

На почетокот на XXI век, речиси сите земји во светот почнаа да ги ценат ефектите од наставата со цел да ги приспособат образовните системи на севкупниот развој на општеството. Со цел да се направат споредби меѓу образовните системи во различни земји, беа промовирани неодамнешните меѓународни тестови. Меѓу најпопуларните се тестовите TIMSS, PISA и PIRLS.

Преку учеството во овие меѓународни истражувачки тестови за мерење на успехот на учениците, извлечени се многу податоци за образовниот систем, образовните програми, образовниот процес, успехот на учениците, работата на наставниците, како и за реализацијата на постигањата на учениците на меѓународно ниво. Овие студии, пред сѐ, им овозможуваат на креаторите на образовната политика да донесат одлуки за подобрување на образованието на нивните земји врз основа на овие вредни податоци. Високиот квалитет, споредливите меѓународни податоци за постигањата на учениците во математиката и во науката се важни за следење и за подобрување на „здравиот“ образовен систем. Спроведувањето на ваквите меѓународни мерења често ги поттикнува образовните реформи со цел да се зголеми квалитетот на образованието.

TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study) е меѓународна студија по математика и природни науки (физика, хемија, биологија и географија) која ги мери знаењата и вештините на учениците од IV и од VIII одделение. Овој тест е организиран од страна на Меѓународната асоцијација за евалуација на образовните достигнувања (IEA, https://www.iea.nl).[3] Овој тип тестирање е организиран во 1995 година и се одржува на секои четири години. Во повеќето земји, TIMSS се спроведува во училиштата кај учениците од четврто и од осмо одделение на формалното образование. Резултатите од TIMSS може да се користат за да се дијагностицира националното ниво и да се извлечат меѓународни споредби.

---

[3] IEA е непрофитна и независна меѓународна организација на национални истражувачки институции, национални истражувачки агенции, истражувачи и аналитичари кои работат на оценување, разбирање и подобрување на образованието низ целиот свет. Повеќе од 60 земји се активно вклучени во мрежата на IEA и над 100 образовни системи учествуваат во студиите на оваа организација.

Досега Република Косово учествуваше во TIMSS-тестот само еднаш во 2019 година.

Од официјалните податоци на организаторот на овој тест (IEA, https://www.iea.nl) гледаме дека косовските ученици постигнале вкупно 444 поени, што е значително под вкупниот просек (500 поени) на сите земји учеснички (IEA, 2020).

Овој тест ги категоризира перформансите на учениците во четири нивоа: ниско ниво, средно ниво, високо ниво и напредно ниво.

Табела 4: Резултати од тестот TIMMS, издание за 2019 година

Нивоа	**Ниско ниво (до 400 поени)**	**Средно ниво (до 475 поени)**	**Високо ниво (до 550 поени)**	**Напредни ниво (до 625 поени)**
Успехот на кос. ученици	73 %	37 %	8 %	1 %

PIRLS (Progres in International Reading Literacy Study) се организира од страна на Меѓународната асоцијација за евалуација на образовните постигнувања (IEA). Овој тест има за цел оценување вештини за читачка писменост и се организира на секои пет години, почнувајќи од 2001 година. Во повеќето земји, PIRLS се спроведува во училишта со учениците од четврто оделение. Резултатите од PIRLS може да се користат за дијагностицирање на националното ниво и за спроведување меѓународни споредби.

Република Косово учествуваше во овој тест во 2021 година. Поради пандемијата COVID 19, тестирањето за 2021 година се одржаа во 2022 година.

PISA (Programme for International Student Assessment) е OECD меѓународна програма за оценување на учениците. Овој тест се организира на секои три години и ги тестира учениците од 15-годишна возраст од целиот свет во областа на читањето, математиката и природните науки. Тестовите се дизајнирани да ги оценат перформансите на учениците на клучните теми за да видат колку се подготвени за вистински животни ситуации. Зошто се тестираат 15-годишниците? Бидејќи, во повеќето земји, децата на возраст под 15 години може да одлучат дали сакаат да продолжат понатаму со образованието или не. Затоа мора да бидат подготвени за живот и за работа. PISA ги објавува резултатите од тестот една година откако ученикот е тестиран и може да им служи на релевантните механизми на земјите учеснички во обликувањето на нивните образовни политики (OECD, 2018a). Пример за ефектот на овој тест е Германија. Веднаш по објавувањето на резултатите од првиот тест PISA во 2001 година, кои беа многу вознемирувачки, германската влада беше вознемирена од денот на објавувањето на овие резултати и во таа насока формираше „Постојана меѓуресорска комисија“ (KMK, https://www.kmk.org/) (Odendahl, 2017). Ова го означи почетокот на длабоките реформи во германскиот образовен систем, кои продолжуваат и денес, произведувајќи програми и стратегии што постојано даваат позитивни ефекти.

Првиот тест за PISA беше спроведен во 2000 година, а потоа се повторуваше на секои три години.

Република Косово учествуваше во тестот PISA трипати, во 2015, 2018 и во 2022 година.

Во 2015 година, кога Косово за првпат учествуваше на тестот PISA, 15-годишните косовски ученици во просек освоија 362 поени по математика, што е далеку под просекот (490 поени) од сите земји на OECD вклучени во истражувањето. Околу 95 %

од нив во просек имале 354 – 365 поени. Во општата табела на тестот PISA 2015 по математика, Косово се најде на 70. место од вкупно 72 земји кои учествуваа во истражувањето.

Според официјалниот извештај подготвен од OECD за резултатите од тестот PISA 2015 од областа на математиката, излегува дека некаде околу 50 % од 15-годишниците во Косово не го достигнуваат ни нивото 1б, додека во рамките на нивото 1б има околу 28 – 29 % од нив, во ниво 2 тие се во просек околу 17 %, на ниво 3 се помалку од 3 %, помалку од 1 % се во рамките на нивото 4 од 6. нивоа на PISA-тестот (OECD, 2016b).

Од извештајот за учинокот на 15-годишните ученици во Косово подготвен од OECD во однос на резултатите од тестот PISA 2018 од областа на математиката, гледаме дека над 90 % од нив не го исполнуваат нивото 3 од 6. нивоа на рангирање на перформансите на OECD (OECD, 2019a).

Инаку, само учениците кои постигнуваат резултати од ниво 3 или повисоки од ниво 3 се сметаат за способни да функционираат правилно на модерно работно место.

По математика, 15-годишните ученици од Косово добија 366 поени, и ова е исто така значително под просекот (489 поени) на сите земји на OECD. Така тие беа рангирани на дното на листата, поточно на 74. место од 77 земји учеснички.

Според истиот извештај, излегува дека некаде околу 47 % од 15-годишните ученици во Косово не го достигнуваат ни нивото 1б, додека во рамките на нивото 1б има околу 29,6 % од нив, на ниво 2 има околу 16,5 %, на ниво 3 има 5,4 %, а на ниво 4 имаме 1,4 %, на ниво 5 имаме 0,1 %, додека на ниво 6 имаме 0 %. на 15-годишни ученици од Косово (OECD, 2019a).

Може да кажеме дека за речиси занемарлив процент, 15-годишните косовски ученици имаа подобри резултати во изданието PISA 2018 отколку во изданието PISA 2015 година.

1.6. Тестовите на знаења и математичката писменост

Во нашето истражување, поточно во процесот на подготовка на работни листови за учениците и писмени подготовки за наставниците, а особено при изготвување задачи за завршните тестови за секое од одделенијата вклучени во истражувањето, особено значење ѝ дадовме на математичката писменост.

Со право се вели дека математичката писменост е мостот меѓу реалниот свет и математиката. Целта на математичката писменост е учениците да ја разберат и да ја применат математиката во нивниот личен и професионален контекст.

Во нашата докторска дисертација посветивме посебно внимание на математичката писменост. Бидејќи дропките може да се претставаат, да се интерпретираат на различни форми и начини и да се применат во различни области на човековата активност, нивното учење нуди добри можности за спроведување на математичката писменост.

Математичка писменост

Повеќето истражувања за математичката писменост се однесуваат на тестовите на PISA и на дефинициите на OECD бидејќи ова го претставува најсериозниот меѓународен потфат поврзан со математичката писменост (Haara et al., 2017).

За целите на PISA 2021, математичката писменост е дефинирана на следниот начин:

Математичката писменост е способност на поединецот математички да заклучува и да формулира, да инкорпорира и да интерпретира математиката за да решава проблеми во различни контексти од реалниот свет. Вклучува концепти, процедури, факти и алатки за опишување, објаснување и за предвидување на појавите. Тоа им помага на поединците да ја препознаат улогата што ја игра математиката во светот и да донесат добри пресуди и одлуки, неопходни за конструктивни, посветени и рефлексивни граѓани на 21 век (OECD, 2018b).

Рамката PISA за математичка писменост е организирана во три широки компоненти: 1. ситуации и контексти во кои се дел проблемите; 2. математичка содржина поврзана со различни проблеми и прашања; 3. математички компетенции што мора да се активираат за да се поврзе реалниот свет (во кој размислуваат) со математиката, за подоцна да се решат овие проблеми.

Четирите контекстуални области кои PISA ги користи за дефинирање на реални ситуации се: лични, професионални, социјални и научни.

Личен контекст: проблеми што се фокусираат на активности околу себе, семејството или определена група.

Професионален контекст: проблеми што се фокусираат на полето на работа.

Социјален контекст: проблеми што се фокусираат на определени заедници (локални, национални, глобални).

Научен контекст: проблеми поврзани со примената на математиката во природата, науката и технологијата (OECD, 2018b).

За првпат, рамката PISA 2021 вклучува вештини на XXI век врз кои се заснова и се развива математичката писменост.

Рамките на PISA го содржат и го интегрираат концептот на математичко моделирање. Глаголите „формулирање“, „примена“ и „толкување“ особено укажуваат на три процеси во кои ученикот активно ќе учествува во решавањето на одделни проблеми.

Математичкото формулирање на ситуации вклучува примена на математичко расудување (дедуктивно и индуктивно) при идентификување на можностите за примена и за употреба на математиката.

Примената на математиката опфаќа примена на математичко расудување со употреба на математички поими, постапки, факти и алатки за изведување математички решенија.

Толкувањето на математиката вклучува размислување за математички решенија или резултати и нивно толкување во контекст на проблем или предизвик (OECD, 2018b).

PISA воспостави хиерархија на нивоа на математичка писменост која се состои од шест нивоа. Овие нивоа обезбедуваат опис на знаењето што учениците се способни да го покажат, но и даваат преглед на дистрибуцијата на нивните перформанси.

На ниво 1, учениците може да одговорат на прашања што вклучуваат познати контексти, каде што се присутни сите релевантни информации и прашањата се јасно дефинирани. Учениците се способни да идентификуваат информации и да вршат рутински процедури според директни инструкции во јасни ситуации, кои се видливи и веднаш се проследени со дразби.

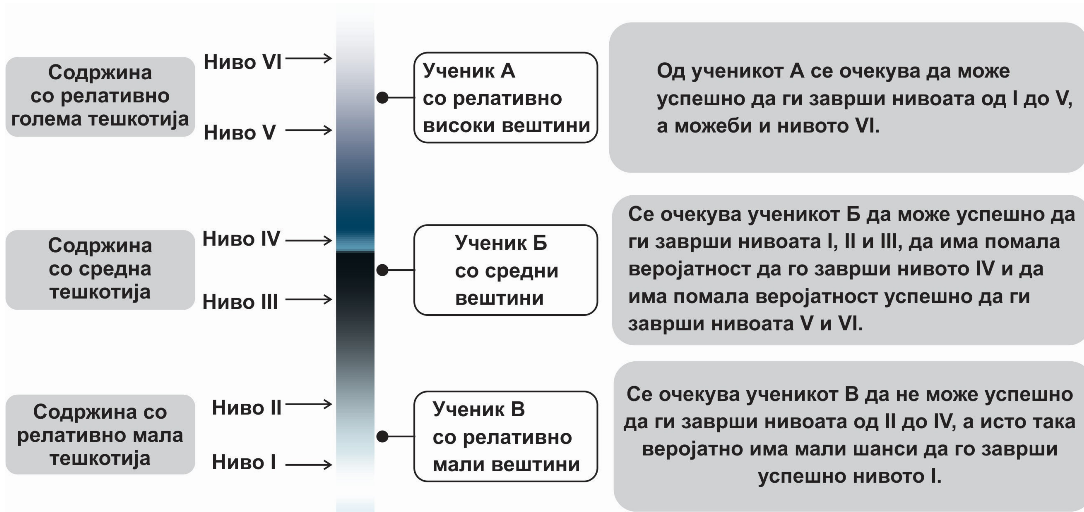
На ниво 2, учениците може да интерпретираат и да препознаваат ситуации во контексти кои бараат само директни заклучоци за да може да извлечат релевантни информации од извор и да користат начин на презентација. Тие се способни буквално да ги толкуваат резултатите.

На ниво 3, учениците може да вршат јасно опишани процедури, вклучувајќи ги и оние што бараат последователни одлуки. Нивните толкувања се доволно силни за да се сметаат за основа за градење едноставен модел или за избор и примена на едноставни стратегии за решавање проблеми. Учениците на ова ниво може да интерпретираат и да користат презентации врз основа на различни извори на информации и директно да заклучуваат од нив.

На ниво 4, учениците ефективно може да работат со експлицитни модели во сложени и конкретни ситуации кои може да вклучуваат ограничувања или да бараат претпоставки. Тие може да изберат и да вклучат различни претстави, вклучително и симболични претстави, поврзувајќи ги директно со аспекти на ситуации од реалниот свет. Учениците на ова ниво може да користат ограничен опсег на нивните вештини и може да размислуваат со определено знаење, во директен контекст. Тие може да измислуваат и да изразуваат објаснувања и аргументи врз основа на нивните толкувања, аргументи и постапки.

На ниво 5, учениците може да развијат и да работат со модели за сложени ситуации, идентификувајќи ограничувања и специфицирајќи претпоставки. Тие може да избираат, да споредуваат и да оценуваат соодветни стратегии за решавање сложени проблеми поврзани со овие модели. Учениците на ова ниво почнаа да ги развиваат вештините да размислуваат за својата работа и да ги пренесуваат заклучоците и толкувањата во писмена форма.

На ниво 6, учениците може да замислат, да генерализираат и да користат информации засновани врз истражување и моделирање на сложени проблемски ситуации и може да го користат своето знаење во релативно нестандардни контексти. Тие може да поврзуваат различни извори на информации и претстави заедно и флексибилно да ги преведуваат меѓу себе и може да размислуваат за напредна математика. Учениците на ова ниво може да размислуваат за своите постапки и точно може да ги формулираат и да ги соопштат своите постапки и размислувања во однос на нивните наоди, толкувања, аргументи и нивната соодветност за почетната ситуација (OECD, 2019b).



Слика 15: Односот меѓу содржината и ученикот на нивоата на математичка писменост (Thomson, Hillman, & Bortoli, 2013)

1.6.1. Математичката писменост и дизајнот на материјали за истражување

Во текот на процесот на осмислување на писмените подготовки за експерименталниот дел, како и на тестовите за соодветните одделенија за моето истражување „Концептот на дропки според Теоријата Пирие-Киерен во основното математичко образование“, успеавме да ги усогласиме со рамката за математичка писменост според PISA, што одговара со нивоата на знаење за математичка писменост; како и со барањата, целите и резултатите од учењето предвидени во наставните програми по математика во Косово.

Учењето на дропките е доста предизвикувачко бидејќи операциите со нив се во спротивност со знаењето за операциите со природни и со цели броеви. Но, воведувањето на математичката писменост може да им помогне на учениците да ги разберат и да комуницираат со дропките.

Дропките може да се толкуваат како дел од целина, однос, оператор, количник и маса. Но, нивното прикажување може да се врши преку фигури – површини, нумерички линии, склопови – објекти, маса. Сето тоа има за цел да му помогне на ученикот да го разбере симболичкото претставување на дропката преку броителот и именителот, кои добиваат различни значења според видот на претставувањето (Italk2learn, 2014).

Деталната анализа за присуството на математичката писменост ја презентиравме во соодветниот дел од анализата и во наодите од нашето истражување (поглавје 3.3. стр. 165).

1.7. Разбирање на математиката и на дропките

1.7.1. Разбирање на математиката

„Разбирање“ е збор што наставниците и истражувачите често го користат во текот на процесот на настава и при спроведување на истражувањата од областа на образованието. Сепак, многу различни перспективи за разбирање се документирани во литературата. Така, на пример, Greno (1987) тврди дека разбирањето е метод за разбирање на структурата на знаењето. Chen (1995) забележал дека разбирањето е еден вид когнитивна активност која вклучува потрага по врски и односи меѓу нештата додека не се утврдат нивните суштински законитости. Wiske (1998) го концептуализира разбирањето како чин на надминување на достапните информации и креативно користење на друго знаење. Zhu (2004) забележува дека разбирањето се однесува на процесот на препознавање и преСтруктурирање на искуствата за да се постигне рационална контрола над нив (Yang et al., 2021).

Бидејќи математичкото разбирање е толку важно и вредно, тоа е опширно истражувано од средината на минатиот век. Меѓутоа, од прегледот на овие студии забележуваме дека литературата се фокусираше, главно, на општите карактеристики, но недоволно на внатрешните карактеристики.

Во однос на математичкото разбирање постоеле и сè уште постојат голем број заблуди и многу предрасуди. Има многу мислења што ја типизираат математиката како тешка наука и дека таа може да биде разбрана само од посебни поединци. Во врска со ова, Пијаже (1950) вели: „Математичкото разбирање не е прашање на способност кај децата. Значи, погрешно е евентуалниот недостаток на успех во математиката да се третира како резултат на недостаток на способност... Математичкото разбирање произлегува од акцијата, па произлегува дека интуитивното претставување не е доволно.“ Пијаже ја смета акцијата како еден вид подготовка за размислување (Munari, 1994).

Затоа е можно различните перспективи на математичкото разбирање да ги одразуваат различните начини на кои разбирањето воопшто се концептуализира.

Повеќето истражувачи, главно, се согласуваат дека математичкото разбирање спаѓа во компетентноста за учење математика. Математичкото разбирање е тесно поврзано со математичките когнитивни структури и процеси. Тоа е процес со кој новото математичко знаење станува дел од внатрешната когнитивна структура на поединецот, поврзувајќи го со претходно стекнатото математичко знаење и интегрирајќи го со внатрешната мрежа. Тие забележаа дека математичката идеја, постапка или факт се разбира ако е дел од внатрешната мрежа. Поконкретно, математиката се подразбира ако нејзината ментална претстава е дел од мрежата на претстави (Yang et al., 2021).

Во однос на математичкото разбирање постојат различни гледишта, но сите тие го третираат математичкото разбирање како внатрешен психолошки процес.

Математичкото разбирање отсекогаш било актуелна тема во областа на математичкото образование и го привлекувало вниманието на многу истражувачи во математичкото образование (Hiebert & Carpenter, 1992). Во 1989 година, Националниот совет на наставници по математика на САД (NCTM, www.nctm.org) јасно изјави дека „фокусот на наставните програми по математика треба да бидат „концептите и разбирањето на математиката“ , а истражувачите и дизајнерите на математичкото образование треба да имаат разбирање за математиката како главен фокус на истражувањето во математичкото образование“ (NCTM, 2000).

Учениците треба да учат математика со „разбирање“. Ова е најприсутна идеја во литературата за математичка едукација која наоѓа поддршка од креаторите на образовната политика, креаторите на наставните програми, истражувачите, наставниците, родителите и учениците (Gülkılık, Uğurlu, & Yürük, 2015).

Разбирањето е поим кој широко се користи во образовните науки. Цело време учениците треба да ги прошируваат структурите на знаењата во нивните умови. Овде ќе зборуваме за фактот како се преземаат менталните слики, слики што доаѓаат во нивните умови, и како ги ангажираат во учењето на математиката, со посебен акцент во учењето на дропките, и како да ги прошириме нив со минување на времето. Тие содржат делови од минати искуства, поврзани со сегашноста и сето тоа влијае на тоа како ќе ги гледаме и ќе ги разбираме работите во иднина (Thechocolateteacher, 2021).

Истражувачите често го опишуваат математичкото разбирање во однос на структурата на репрезентациите на внатрешното знаење на поединецот. На пример, Хиеберт и Карпентер (1992) го дефинираат разбирањето како „создавање врски меѓу идеите, фактите или процедурите", каде што степенот на разбирање е директно поврзан со карактеристиките на врските (Goos et al., 2007).

Многу истражувачи тврдат дека како што поединците продолжуваат да растат и да се развиваат, нивното ниво на математичко разбирање соодветно ќе се менува. Навистина, „степенот на разбирање се определува според бројот и силата на врските. Една идеја, или една математичката постапка или факт е целосно разбрана ако е поврзана со постоечки мрежи со посилни или со побројни врски" (Hiebert & Carpenter, 1992).

Бартлет тврди дека математичкото разбирање може да го намали товарот на меморијата, да ги филтрира невалидните информации во мозокот и да ја зачува долговечноста на меморијата (Bartlett, 1932).

Прашањето како детето ја разбира математиката и како го проширува (го продлабочува) своето разбирање датира од поодамна. Ова прашање особено беше покренато од Ричард Р. Скемп во 1979 година кога го објави трудот „Relational Understanding and Instrumental Understanding". Овој труд отвори широка дебата во Велика Британија, во англосаксонските земји и пошироко во академскиот свет, како резултат на што се направени низа истражувања и студии во врска со математичкото разбирање на децата, како на пример од Скемп (1976, 1979), од Бакстон (1978) и др. Сите овие напори кулминираа со трансценденталната рекурзивна теорија предложена од Пирие-Киерен, во 1944 година (Iwata & Yasunaga, 2016).

Скемп (1979) го типизира разбирањето во две категории: рационално разбирање и инструментално разбирање. Скемп го претставува рационалното разбирање како „знаејќи како да го направат и зашто", а инструменталното разбирање како „способност за да се спроведат математичките правила и процедури". Инструменталното разбирање се обидува да даде резултати веднаш и да понуди брз приод до одговорот. Од друга страна, рационалното разбирање нуди една основа за ефикасен трансфер, за олеснување на зголемувањето на разбирањето. Бакстон (1978) го подели математичкото разбирање на четири нивоа: меморирање напамет, набљудување, длабоко разбирање и логично разбирање. Додека Харсковик и Бергерон (1983) го поделија математичкото разбирање на четири нивоа: интуитивно, процедурално, апстрактно и формално. Од друга страна, Пирие и Киерен (1994) го класифицираа во осум нивоа: примитивно препознавање, создавање слика, поседување слика, истакнување карактеристики, формализирање, набљудување, структурирање и изум (Yang et al., 2021).

Една друга категоризација на „математичкото разбирање" се наоѓа во две иницијативи на Националниот совет за истражување од САД (2001) што се однесуваат на концептуалното разбирање и на процедуралната флуентност. Концептуалното разбирање е способност да се знае зошто математичката идеја е важна во видовите контексти во кои ќе биде успешна. Учениците со концептуалното разбирање го организираат своето знаење во кохерентна (логичка) целина и се способни да ги поврзат новите идеи со идеи што веќе ги знаат. Процедурална флуентност е знаење како да се користат процедурите на најсоодветен начин и способност тие да се изведуваат флексибилно, точно и ефикасно (Gibbons, 2012).

Истражувањата покажуваат суштински разлики меѓу ригорозните пристапи, правила и процедури за учење математика и истражувачките пристапи за учење математика. „Учениците често прават грешки кога следат процедури без основно разбирање. Грешките, обично, се резултат на систематски правила и процедури што значат искривување на здравите процедури“ (Mason & Spence, 1999).

Овие, како и други рамки, се обиделе да ја објаснат идејата на разбирањето правејќи категоризација на разбирањето на разни видови или нивоа. Иако овие видови и нивоа на разбирањето може да бидат корисни во карактеризацијата на комплексноста и на компонентите на разбирањето, тие сè уште оставаат прашања за одговарање во врска со процесот на разбирањето. Сиерпинска (1990) го подигна следното прашање за разбирањето. „Дали има нивоа, степени или дури и видови на разбирање?... Разбирањето дали е еден акт, едно емоционално искуство, еден интелектуален процес или еден начин на разбирање?... Кои се условите да се разбере дека едно дејство се случува?.... Како сме постигнале да ги разбереме?... Дали разбирањето може да се мери и како? Пирие и Киерен (1989, 1991, 1992, 1994а, 1994б) ја сметаат својата работа како начин за зголемување на математичкото разбирање, како обид да се одговори на неколку прашања поставени од Сиерпинска (Gibbons, 2012).

Од појавата на математичкото образование како област сама по себе, создадени се многу теории за учење и настава по математика, како што се: Теоријата на Бронел (1945) за она што тој го нарече „значајна математика“, нагласувајќи го разбирањето на математичките односи и способноста за квантитативно размислување; истражувањето на Скемп (1979) за теоретските разлики меѓу „инструменталното разбирање“ и „релациското разбирање“ на математиката; Теоријата на Ван Хиеле за тоа како децата учат геометрија; методот на Полија (1945) за улогата на хеуристичките процеси во решавањето на математичките проблеми; гледиштето на Фреудентал (1983) за математиката (математичкото образование) како човечка активност што ја формира основата на холандскиот модел на „математичко реалистично образование“; Теоријата на Фишбан (1987) за интуитивни извори на математичко размислување.

Така, овде споменавме само некои од најзначајните во историјата на истражувањето во математичкото образование. Иако беа добро упатени во теориите и во методите на психологијата, повеќето од нив беа прилично критични за нејзината ограничена примена во областа на математичкото сознавање, учење и настава, и нагласија дека психологијата на математичкото образование треба да развие свои прашања дури и подлабоки теоретски и методолошки перспективи (Verschaffel & Corte, 2015).

Во текот на развојот, тензиите и разликите во гледиштата меѓу математичките педагози, од една страна, и психолозите, наставниците и математичарите, од друга страна, продолжија и сè уште продолжуваат. Истражувањето на многу носители на овие пристапи јасно докажува дека ова поле не е ставено во рамките на нормалните науки. Напротив, се наоѓа во период на значителна сложеност и разновидност во теоретските, методолошките, експерименталните и размислувачките перспективи, не само за основните прашања за тоа што е математика и како таа може да се научи и запомни туку и за основните прашања од типот што е математичко образование (Verschaffel & Corte, 2015).

Од многуте теории што се развиени во последните децении и се користат во областа на математичкото образование, најдоминантни се „теориите формирани во рамките на самиот предмет математика“. Ваквите теории ги ставаат спецификите и интегритетот на полето во центарот, без никакво двоумење, додека позајмуваат идеи и техники од други дисциплини (Verschaffel & Corte, 2015).

Таква е Теоријата Пирие-Киерен на која ѝ е посветено ова истражување (дисертација).

Теоријата Пирие-Киерен за градење и за проширување на математичкото разбирање е конструктивистичка теорија. Конструктивизмот е став што ја нагласува активната улога на ученикот во конструирањето на разбирањето и во извлекувањето разбирање од информациите што се добиваат.

Ставовите на конструктивизмот како психолошка теорија ни кажуваат многу за тоа како учениците учат математика. Употребата на конструктивизмот во наставните единици по Математика има многу варијации. Единственото нешто што им е заедничко е централната улога на ученикот во процесот на учење (Faulkenberry & Faulkenberry, 2006).

Значи, не постои единствена конструктивистичка теорија за учење, но мноштвото конструктивистички теории се согласуваат во две точки:

Учениците се активни во градењето на сопствените знаења.

Во овој процес на градење на знаења, важни се социјалните интеракции.

Конструктивистичките погледи се засноваат врз истражувањата на Пијаже, Виготски, филозофијата на Џон Дјуи и други (Woolfolk, 2011).

Истражувачите предупредуваат на многу заблуди за конструктивизмот. Авторите сугерираат дека оригиналниот поим за конструктивизам е во опасност да биде искривен и премногу поедноставен од корисниците кои сакаат да го сфатат како „вистинска работа“ во нивното учење или научно истражување. Конструктивизмот е повеќе отколку учениците да користат алатки за конкретизација и да се вклучат во групни дискусии. Многу наставници посакуваат да имаат список на однесувања и дејства што би можеле да ги направат, а кои би ги направиле „конструктивистички наставници“. Авторите забележуваат дека не постои единствен конструктивистички модел на учење што може да се примени, но наставниците може и треба да создаваат средини засновани врз конструктивистички верувања во активностите (Pirie & Kieren, 1992).

Теоријата (моделот) Пирие-Киерен е динамичен и органски процес на зголемување на математичкото разбирање. Сузан Пирие и Томас Киерен (1994) развија модел за да го опишат зголемувањето на математичкото разбирање како еден „целосен, динамичен, нивелизиран, но нелинеарен, трансцендентално рекурзивен процес“. Оваа теорија опфаќа движење назад и со ред меѓу разните начини и нивоа на запознавање, преставени во една редица на слоеви или нивоа на преклопувања.

Теоријата Пирие-Киерен го гледа процесот на математичкото разбирање како внатрешен, сеопфатен, сложен и итеративен процес. Пирие и Киерен (1994) предложија теорија на математичко разбирање што се карактеризира со трансцендентна рекурзија. Тие тврдеа дека математичкото разбирање е холистички, динамичен, хиерархиски, нелинеарен, рекурзивен и внатрешен психолошки процес.

„Холистичкото“ образование е модел на образование што го развива физичкиот, емоционалниот, социјалниот, духовниот и интелектуалниот потенцијал на детето. Во математичкото образование, холистичкиот модел се смета за подобен за учениците од пониските одделенија од основното образование. Во суштина, возрасната перспектива на учениците од пониските одделенија, главно, е холистичка, така што учењето сепак зависи од конкретни предмети и искуства.

Холистичкиот модел во математичкото образование се реализира преку математички задачи сразмерно на потенцијалот на учениците, така што процесот на нивно решавање го развива когнитивниот, но и духовниот, емоционалниот, социјалниот, естетскиот и психомоторниот аспект (Hayati et al., 2018).

„Динамично“ укажува дека математичкото разбирање е процес во кој се интегрирани многу различни видови знаења.

„Хиерархиски“ укажува дека процесот на математичко разбирање може да се подели на неколку нивоа.

„Нелинеарно“ значи дека математичкото разбирање напредува низ различни движења. (Пирие и Киерен, 1994; Ма, 2001; Ли и Жанг, 2002; Мартин, 2008). Дополнително, Лиу (2009) има слични ставови и го концептуализира математичкото разбирање како процес кој вклучува континуирана организација и реорганизација, како динамичен, израмнет, нелинеарен процес (Yang et al., 2021).

Математичкото разбирање е важен дел од образованието и од развојот на поединецот. Ова вклучува знаење, вештини и разбирање на математичките концепти и методи и нивна употреба на различни начини. Во првите редови на математичкото разбирање се препознавањето на основните концепти, способноста за решавање математички проблеми, анализата и интерпретацијата на математичките податоци, употребата на математиката во различни контексти и развојот на вештини за решавање проблеми.

Важноста на математичкото разбирање е присутно длабоко и широко во многу аспекти од животот и развојот на поединците. Тоа помага да се развијат критички и аналитички вештините на умот, овозможувајќи им на поединците да анализираат, да разберат и да решаваат различни проблеми. Исто така, математичкото разбирање наоѓа широка примена во други области на знаењето, науката, инженерството, технологијата, економијата и во многу други области, подготвувајќи ги поединците да се соочат со предизвиците и проблемите во секојдневниот живот и во професионалните ситуации.

Во Косово недостигаат реални проекти и студии за математичко разбирање, особено за специфични математички содржини и концепти, како што се дропките во нашиот случај. Како резултат на овие недостатоци, се среќаваме со ад хок пристапи во дизајнирањето на програмите и на учебниците по математика. Се обидовме да идентификуваме некои од овие проблеми и недостатоци и тие се дел од анализата во овој труд.

1.7.2. Разбирањето на дропките

Прегледувајќи го собраниот литературен материјал поврзан со проблемот на учење на дропките, заклучуваме дека се препознаваат важноста и улогата на дропките за развој на математичките и на општите компетенции. Исто така, забележуваме дека постои определена внимателност во пристапите кон учењето на дропките бидејќи во целиот свет учењето на дропките од учениците во основно и во средно училиште се соочува со предизвици и тешкотии во разбирањето на концептот на дропките и операциите со нив. Истражувањата покажуваат дека и учениците од земји со висок степен на традиција во математичкото образование, како Кина и Јапонија, се соочуваат со предизвици во учењето на дропките (Fazio & Siegler, 2011).

Истражувачите Едуардо С. Суарез и Жан Ф. Мехо во студија за проблемите на учењето дропки, врз основа на серија истражувања поврзани со нивното учење, откриваат дека дропките навистина се тешка содржина, па и покрај напорите на истражувачите, се чини дека учениците сè уште се соочуваат со речиси истите тешкотии кои беа забележани пред повеќе од 30 години (на пр. Lortie-Forgues, Tian и Siegler, 2015). Спојувањето на вештините за манипулирање со делители и разбирањето на алгебрата беше разгледано од страна на Емпсон, Леви и Карпентер во нивното истражување од 2011 година. Во ова истражување, авторите се фокусираа на идентификувањето на корелацијата меѓу вештините на учениците за работа со делители и нивните вештини за разбирање на основните концепти во алгебрата (Empson, Levi & Carpenter, 2011). Исто така, познато е дека кога наставата по математика не е ефикасна, на крајот тоа резултира со напуштање на областа математика дури и од учениците кои утре би можеле да станат добри математичари (Boaler, 2000).

Во последно време, истражувањата поврзани со наставата и учењето на дропките постигнаа многу напредок, но сè уште се отворени дебатите за некои суштински аспекти.

На пример, Керслајк (1986) во своето истражување прикажа тешкотии кога ја истражуваше идејата дека дропките претставуваат врски со поимот „дел-целина“, но во исто време, дропките (рационалните броеви) се броеви исто како и целите броеви. Поради сложеноста на содржината, предизвикувачки е процесот на настава и учење на дропките во почетните одделенија од основното образование. Истиот рационален број може да се изрази како дропка или како децимален број, претставен со различни претстави. И други аспекти поврзани со рационалните броеви може да бидат предизвикувачки, како на пример, секој рационален број може да се претстави на бројната права. Сето ова предизвикува учениците постојано да се борат со дропките (De Wolfe и Vosniadou, 2015).

Различни студии доведоа до развој на модели за тоа како да се изградат концепти поврзани со дропките. На пример, некои истражувачи предлагаат да се нагласат различните својства меѓу дропките и целите броеви (Gelman и Williams, 1998; Yoshida и Sawano, 2002; Geary, 2006; DeWolf и Vosniadou, 2015). Но, други, напротив, заклучуваат дека дропките прво треба да се претставаат како продолжение на цели броеви и да се фокусираат на тоа како сите броеви може да се поврзат со нивната локација на бројната права (Siegler, Thompson и Schneider, 2011; Empson, Levi и Carpenter, 2011). На пример, Gelman и Williams ги дефинираат дропките како поделба на два броја и тврдат дека поделбата, обично, не им е познат концепт на децата, а исто така истакнуваат дека идејата за дропките како броеви може да биде концептуално неконзистентна со знаењето на учениците за броење (Gelman и Williams, 1998). Значи, некои истражувачи се согласуваат со идејата дека дропките и целите броеви треба да се предаваат одделно поради остри разлики меѓу овие два концепта, други веруваат дека развојот на концептот број еволуира со разбирањето дека сите рационални броеви имаат големини и може да се претставаат на бројната линија (Eduardo & Jean, 2021).

Додека истражувачите дебатираат за прашањето за разбирање на дропките, може да заклучиме дека не е постигнат голем напредок во наставата и учењето на дропките.

Нам ни е јасно дека истражувањето придонесува за учење и за разбирање на рационалните броеви и покрај (или можеби поради) овие дебати. Но, кога истражувачите Лортие-Форго, Тиан и Сиеглер (2015) го повторија тестот спроведен пред околу 30 години со група ученици, ги забележаа истите тешкотии како порано. Ова, се разбира, може да биде показател за големи празнини меѓу работата на истражувачите и онаа на креаторите на политиките или авторите на учебниците итн. (Eduardo & Jean, 2021).

Причините зошто учениците имаат проблеми со дропките имаат повеќе врска со нивното логично разбирање. Концептот на „дел“ е толку апстрактен што децата навистина имаат проблем да разберат и да изразат што претставува и како се поврзува со броевите што ги користат за да ги претставаат (делови). Во раните одделенија, учениците треба да го развијат својот интуитивен пристап кон целите броеви преку примена на различни модели и претстави. Користејќи визуелни стратегии, учениците се способни да развијат чувство за број и за дропка, како и да ја разберат големината на дропката (Noura, 2009). Важно е наставникот да им помогне на учениците да разберат дека дропките се различни од другите броеви. Џон А. Ван де Вале, Карен С. Карп, Џенифер М. Bay-Вилјамс (John A. Van de Walle, Karen S. Karp, Jennifer M. Bay-Williams, 2016); Крамер & Анри (Cramer & Henry, 2002) посочиле дека ако наставниците посветат повеќе внимание и време во основното училиште за да изградат разбирање за дропките користејќи конкретни модели и да ги нагласат концептите, значењето, симболиката итн., тогаш може да им се пристапи на дропките посоодветно во средното училиште (Noura, 2009). Децата сакаат да работат со парчиња (делови) и тоа им дава вистинско разбирање на дропките за да го изградат остатокот од нивното знаење за дропките. Препорачливо е таквите претстави да се работат и да се држат закачени на ѕидовите од училницата во текот на времето додека се дискутира за дропките (Nelson, 2015).

Безук и Крамер (Bezuk & Cramer, 1989), кои опширно се занимаваа со проблемот на основното учење на дропките, препорачуваат акцентот на учењето на дропките да се стави на развивање квантитативно разбирање на дропките и развивање алгоритми за извршување операции со дропки.

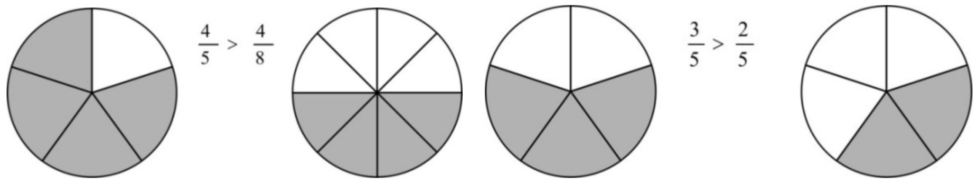
Новите концепти за дропките внимателно мора да им се објаснат на децата, земајќи ги предвид посебните својства на дропките што се во спротивност со концептите за природни и за цели броеви научени претходно. Тие добро мора да расудуваат зошто $\frac{1}{3}$ е помала од $\frac{2}{2}$ бидејќи проблемот е што знаат дека 3 е поголемо од 2. Овие работи треба да се разјаснат со примери од секојдневниот живот. За да се разјасни ова прашање, експертите нудат неколку примери за тоа како квантитативното разбирање им овозможува да го разјаснат концептот на дропката. На пример, на учениците треба да им се објасни дека кога питата ќе се подели на 3 еднакви дела, секој дел ќе биде помал од дел од идентична пита поделена на два еднакви дела. Значи, на колку повеќе делови е поделена големината, толку помала ќе биде големината на секој дел. Квантитативното разбирање на дропката помага и во разбирањето на заокружувањето на дропката до најблискиот природен број и во разбирањето на нивната споредба. На пример, учениците треба да утврдат дека $\frac{12}{13}+\frac{7}{8}$ е приближно 2 бидејќи $\frac{12}{13}$ е приближно 1 и $\frac{7}{8}$ е приближно 1. Исто така, децата треба да може да расудуваат зошто $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ не може да биде еднаква на $\frac{2}{5}$ бидејќи веќе е помала од $\frac{1}{2}$. Создавањето квантитативно разбирање за дропките може да се заснова врз секојдневните искуства на учениците, на употребата на визуелно и физичко претставување, како и на упатства и процедури дадени од наставниците во текот на процесот на учење (Bezuk & Cramer, 1989).

Според американските стандарди за математика:

- Дропките бараат разбирање и концептуално знаење.
- Операциите со дропки се спротивни на она што децата го научиле за операциите со природни и со цели броеви.
- Дропките се содржини што учениците ќе ги следат во текот на училишните години и потоа (http://www.corestandards.org/math).

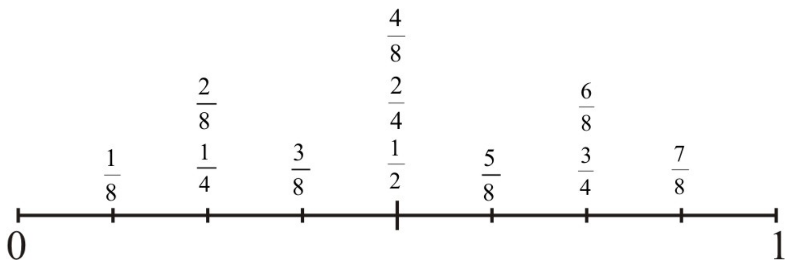
Мајкл Липенс, специјалист наставник во јавното училиште во Кембриџ, ги дава овие препораки за споредување на дропките:

1. Дропки што имаат заеднички именител
    - Учениците користат конкретни материјали за да споредуваат дропки и го користат ова знаење во апстрактното размислување во подоцнежните одделенија.
    - Најпрвин треба да се фокусираат на конкретни модели на области.
    - Деловите се со иста (еднаква) големина.
    - Колку е поголем броителот, толку е поголема дропката.
2. Дропки што имаат заеднички броител
    - Секогаш се однесуваат на иста целина.
    - Учениците се запознаваат со обрасци за дропки што ги опишуваат односите меѓу делот и целата големина.
    - Колку повеќе парчиња, толку е помала големината на секое парче.
    - Учениците ја знаат (разбираат) големината на парчињата (Lippens, 2013).



Слика 16: Споредување дропки со ист броител и именител

3. Транзитивна стратегија



Слика 17: Транзитивното својство на споредување на дропките

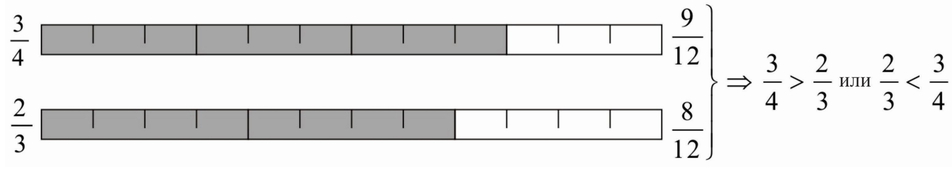
Кога учениците ја користат референтната точка на $\frac{1}{2}$, тие го користат транзитивното својство.

На пример, да споредуваат дропки меѓу себе $\frac{14}{24}$ и $\frac{17}{36}$!

Откако на дропката $\frac{14}{24}$ броителот (14) е поголем од половина од именителот (24), тогаш таа е поголема од $\frac{1}{2}$, така што $\frac{14}{24} > \frac{1}{2}$.

Откако на дропката $\frac{17}{36}$ нејзиниот броител (17) е помал од половина од именителот (36), тогаш таа е помала од $\frac{1}{2}$. Значи, $\frac{17}{36} < \frac{1}{2}$. Од каде што потекнува: $\frac{14}{24} > \frac{17}{36}$.

Стратегија: „Целосно комплетирајте го целото“. Ова го илустрираме со сликата подолу (Rexhepi, 2018).



Слика 18: Стратегија на спроведување дропки: „Целосно комплетирајте го целото“

Друг проблем што го попречува разбирањето на дропките е претставувањето и преземањето содржини за дропките на формален начин, со примена на процедурални шаблони и клишеа. Овој пристап може да предизвика лажна доверба кај учениците дека знаат дропки и знаат како да вршат операции со нив. Овој начин нашироко доминираше во 70-тите години на 20 век. Меѓу 70-тите и 80-тите години, кога започна фазата на применета математика, особено во компјутерската наука, дефектите на овој пристап излегоа на површина и тоа ја промовираше свеста на наставниците и на другите за важноста на дропките и како да ги учат. Присуството на ова лажно верување беше забележано преку серија емпириски студии, како оние фокусирани на аритметички операции (Bell, 1988), (FISCHBEIN et al., 1985), (Graeber & Tirosh, 1989) и (Tsamir & Tirosh, 2002). Овие истражувања покажаа дека голем број ученици мислат дека: множењето на дропките секогаш дава поголема дропка, додека со нивното делење секогаш се добива помала дропка; со делење со нула се добива број. Сето ова е последица на создавањето лажно верување засновано врз примитивни шеми за операции со природни броеви што ги надминуваат набљудуваните факти (Ciosek & Samborska, 2016).

Во однос на наставата за градење трајно и значајно знаење за дропките, истражувачите имаат неколку препораки во врска со тоа кога да се започне со учење на дропките и како да се презентираат пред учениците, од кои некои ги споменав погоре. Во продолжение даваме некои од препораките кои повеќе се поврзани со начинот на поставување и толкување на дропките пред учениците и кои се посоодветни на косовскиот контекст. Овде, вреди да се споменат речиси идентичните препораки во однос на учењето на дропките што произлегуваат од истражувањето на две веродостојни меѓународни институции:

- Истражување на Меѓународната академија за образование (IAE) спонзорирано од UNESCO, Меѓународното биро за образование (IBE) (Fazio & Siegler, 2010), и

- Истражување на Институтот за образовни студии (IES), дел од Стејт департментот на САД (Siegler, Carpetner, Fennell, Geary, Lewis, Okamoto, Thomson, Wray, 2010).

И двете институции препорачуваат поучувањето за дропките да се направи преку различни активности и наставни стратегии, од кои сите се фокусираат на концептуалното разбирање на дропките од страна на учениците. Кога учениците имаат површно разбирање за дропките, тие покажуваат проблеми со нивното елементарно разбирање, на пример, многу ученици ги третираат броителот и именителот на дропката како посебни броеви, а не како обединета целина, а постапките и операциите со дропките се предаваат произволно и лесно се мешаат едни со други. Поради оваа причина, тие им препорачуваат на наставниците дека со негување на концептуалното разбирање на дропките, може да им помогнат на учениците да разберат дека дропките се реални броеви. Експертите препорачуваат и проширување и дополнување на знаењето на наставниците за дропките. Наставниците кои имаат солидно познавање на дропките и кои, исто така, препознаваат вообичаени заблуди на учениците играат суштинска улога во подобрувањето на учењето на дропките од страна на учениците (Rexhepi, 2017).

Причините зошто учениците имаат проблеми со дропките имаат врска со нивното логичко разбирање. Концептот за еден „дел“ е апстрактен така што учениците навистина имаат проблеми да разберат и да изразат што тоа претставува и како се поврзува со бројките што ги употребуваат за да се презентираат тие (деловите) (Noura, 2009).

Според истражувачот Дин Болард, директор на проектот „Core Learning“ (www.corelearn.com), главниот проблем со кој се соочуваме од самиот почеток е апстрактното разбирање на дропките. Во таа насока, тој предлага во текот на процесот на учење на дропките да се користат физички и визуелни модели, вклучително и хартии за виткање, ленти и модели од различни материјали и форми, како правоаголни и кружни, поделени на парчиња, каде што учениците ќе разликуваат и ќе поместуваат определени делови како што се прикажани со соодветните дропки. Тој, исто така, предлага да се користат модели на отсечки и на бројни линии кои може да помогнат да се илустрира начинот на кој се изведуваат различни аритметички операции со дропки (Bollard, 2019).

Мелиса Иглесиас (наставник во основно училиште во Флорида) на нејзиниот личен блог (https://moretime2teach.com) ја нагласува потребата учениците прво да ја разберат идејата за делење на количината на еднакви делови.

„Кога се работи со дропки, апсолутно е неопходно учениците да разберат дека деловите на една целина мора да бидат еднакви. Ова е особено важно кога ќе почнат да споредуваат дропки.

Им велам на моите ученици да помислат на момент кога побарале од пријател да сподели колаче или бонбони. Што би помислиле ако другарот им даде помало парче и не го подели колачето на еднакви делови? Веројатно не би го сакале тоа! Тие веројатно би рекле дека не е фер. Па, затоа нашите ученици треба да разберат дека истото се случува и со дропките. За да се подели колаче, форма, пица или кој било друг предмет или група, сите делови мора да бидат еднакви“ (Yglesias, 2022).

Од овие истражувања произлегува дека на учењето и на разбирањето на дропките и дејствата со нив влијаат повеќе фактори од различна природа, како што се: психолошки, методолошко-дидактички, социјални итн... (Gabriel, Coché, Szucs, & Carette, 2013). Авторите на ова истражување ги формулирале следните хипотези во однос на проблемите во учењето и во разбирањето на дропките: дропките содржат различни поими од оние на природните и на целите броеви; нивното значење бара концептуална реорганизација за разлика од природните и од целите броеви; процесот на разбирање на дропките вклучува концептуално знаење и сложени процедурални манипулации.

Роберт Сиглер, професор по когнитивна психологија на универзитетот „Карнеги Мелон“ во обид да им помогне на наставниците да го користат претходното знаење на децата за да го разјаснат значењето на дропките, истакнува: „Кога децата доаѓаат на училиште, тие веќе имаат некаква основа за разбирање за дропките. На пример, ако ги прашате како може да ни дадат половина од износот, тие го прават тоа така што ќе бројат еден за вас, еден за мене, еден за вас, еден за мене ... и така натаму“. Проблемите доаѓаат кога децата почнуваат да учат за дропките на формален начин, а тоа може да се случи во второ, трето и четврто одделение. Во тоа време, децата почнуваат да учат некои општи идеи за дропките, како на пример, што значи именител, што значи броител, што се случува со вредноста на дропката кога броителот или именителот на дропката се зголемува. Потоа продолжуваат низ часовите за аритметика на дропки, итн... (Rexhepi, 2018).

Во наставата и учењето на дропките, проблематична сама по себе е возраста (одделенијата), како и изборот и адаптацијата на содржините. Па, кога, како и што треба да се научи!?

Во однос на најсоодветната возраст кога е најдобро за првпат да се подучуваат децата на дропки, имаме две препораки од истражувачите од оваа област: 1. Во земјите со развиени образовни системи, пожелно е дропките да се учат уште од раните одделенија (Fazio & Siegler, 2010), 2. Во земјите со послаби образовни системи, пожелно е да се предаваат од V одделение, па натаму (Brdar et al., 2014).

Сите овие гледишта имаат заеднички именител, односно пред да се започне со објаснување и учење (разбирање) на дропките, учениците мора да бидат опремени со знаења за природните и за целите броеви, како и за операциите со нив. Исто така, учениците треба да имаат јасен концепт за поделба, поделба на еднакви делови и на цели големини.

Гледајќи ги проблемите на учењето дропки и нивното значење за разјаснување на новите математички поими, како и за други образовни и научни области/предмети, во 1979 година во САД е дизајниран Националниот проект за рационални броеви RNP – Rational Number Projekt. Овој проект е финансиран директно од Националната научна фондација и применет од голема група американски универзитети координирани од Универзитетот во Минесота (The College of Education & Human Development). Главни носители на овој проект се најпознатите истражувачи од областа на рационалните броеви, како што се: Мерлин Џеј Бер од Универзитетот Северен Илиноис, Кетлин Крамер од Универзитетот во Минесота, Гершон Харел од Универзитетот во Калифорнија, Сан Диего, Ричард Леш од Универзитетот во Индијана, Томас Пост од Универзитетот во Минесота (Cramer et al., 2009).

Како резултат на тимската работа меѓу професорите од универзитетите вклучени во овој проект, истражувачи, ученици, наставници од основните и од средните училишта, денес овој проект успеа да реализира и да дизајнира низа истражувања, студии; наставни програми, прирачници, учебници и многу модели за настава на рационалните броеви кои може да се преземат од веб-страницата на проектот.

Ова истражување ја истакна потребата од користење на квантитативниот концепт за дропки и, воопшто, за рационални броеви, за потребата од повеќе време (поголем број наставни часови) за справување со содржините на рационалните броеви и за создавање на поструктурирани материјали за учење (книги, прирачници,...), опремени со што е можно повеќе интегрирани информации што ги поттикнуваат учениците да размислуваат за секоја содржина за учење (Cramer et al., 2009).

Од сето ова може да заклучиме дека разбирањето на дропките, навистина, е проблем што го загрижува целиот свет, а оваа загриженост кај нас треба да биде уште поголема поради проблемите што ги има образовниот систем на Косово.

Теоријата Пирие-Киерен е многу ефикасна теорија што се занимава со тоа како учениците може да ги градат и да ги прошират своите математички знаење воопшто, а ние се обидовме да ја контекстуализираме оваа теорија во однос на разбирањето на дропките.

Потоа ќе ги претставиме општите карактеристики на Теоријата Пирие-Киерен за развој и за проширување на математичкото разбирање, кои потоа ги контекстуализиравме во наставата на дропките, земајќи го предвид косовскиот контекст. Специфичните и деталните аспекти на ова приспособување може да се видат во анализата на писмените подготовки за наставниците и во работните листови за учениците.

1.8. Теоријата Пирие-Киерен

„... но напредокот значи исто така да направите два чекора наназад, како да се вратите на енергијата од ветерот наместо нафтата, и слични работи. Стремете се кон иднината! Назад со целата сила!“

(Умберто Еко: “Pape Satàn Aleppe: Chronicles of a liquid society”)

Основите на Теоријата Пирие-Киерен лежат во конструктивизмот и е конципирана од истражувањето на двајца теоретичари и практичари во математичкото образование, д-р Сузан Пирие и д-р Томас Киерен.

Иако работеле на различни места (Сузан Пирие – Универзитетот во Оксфорд, Томас Киерен – Универзитетот во Алберта) и биле вклучени во различни области од истражувањето на математичкото образование во тоа време, тие се собрале во 1988 година водени од заедничкото верување дека учењето е динамичен процес и дека човек никогаш целосно не разбира, туку секогаш е во процес на развивање на своето разбирање (Borgen, 2006).

Првичната дефиниција на Теоријата Пирие-Киерен за математичкото разбирање доаѓа од конструктивистичката дефиниција на Вон Гласерфелф (Fon Glaserfelf, 1987), која го дефинира разбирањето како континуиран процес на организирање структури на знаење.

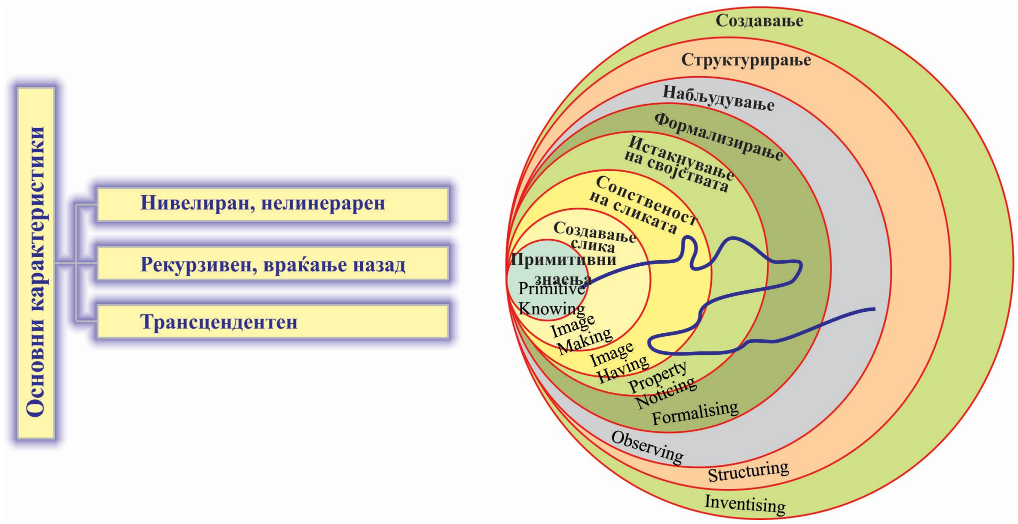
Теоријата Пирие-Киерен ја проучува динамиката на раст во математичкото разбирање. Оваа теорија го смета математичкото разбирање не како производ, ниту како нешто што треба да се стекне и потоа да се примени, туку како тековен процес кој постојано се менува и се шири. Исто така, оваа теорија го смета математичкото разбирање не како линеарен процес, туку како динамичен, трансцендентен и рекурзивен процес, каде што растот и проширувањето на разбирањето се случува во акција, во различни контексти, вклучително и интеракција со материјалите, со учениците и со наставниците (Mokwebu, 2013).

Пирие и Киерен го проширија конструктивистичкиот поглед на математичкото разбирање за да вклучат енактивистичка перспектива[4], каде што разбирањето е индивидуално, но под влијание на надворешни процеси (Kieren, 1992; Kieren, Reid & Pirie, 1995). Во своите последователни истражувања, тие развија и проширија различни аспекти од својата теорија, приспособувајќи ја и модифицирајќи ја за да ја зголемат нејзината моќ како истражувачка алатка (Pirie & Kieren, 1994a; Kieren et al, 1995). Така,

[4] Енактивизмот е став во когнитивните науки кој тврди дека сознанието настанува преку динамична интеракција меѓу поединецот и неговата околина (Thompson, 2010).

Теоријата Пирие-Киерен е во процес на формирање и развој речиси дваесет години, во процес на раст и развој кој е во согласност со верувањето на Пирие и Киерен за растот на математичкото разбирање (Borgen, 2006).

Оваа теорија е во целосна согласност со многуте препораки на национални и меѓународни научници, методичари, образовни и научни институции ширум светот кои сугерираат дропките пред учениците да бидат презентирани преку реални модели и проблеми, преку квантитативно разбирање. Значи, неслучајно клучен збор во овој модел е зборот „слика“. Ова е затоа што истражувачите верувале дека овие нивоа се засноваат врз фигуративни претстави, а исто така и врз ментални слики (Mokwebu, 2013).



Слика 19: Карактеристики на Теоријата Пирие-Киерен (Адаптирано од Martínez, 2017, слајд 25)

Карактеристична за моделот Пирие-Киерен е рекурзијата, виткање или свиткување наназад (folding back). Кога ученикот се соочува со еден проблем кој не може да го реши, тој треба да се врати на внатрешно ниво. Оваа активност е потребна за проширување на разбирањето и ја покажува нелинеарната природа на способноста да се разбере математиката (Iwata & Yasunaga, 2016).

Значи, кога едно лице работи на определено ниво на разбирање според Теоријата Пирие-Киерен, мора да се врати на внатрешно ниво на разбирање за да ги испита и да ги измени постоечките идеи и разбирање. Овој процес е познат како „преклопување наназад“ што значи дека кога ученикот ќе се врати на претходните слики и сфаќања на концептот, тој ги носи со себе барањата на новата ситуација и ги користи за да го информира своето ново размислување на внатрешно ниво, што доведува до она што може да се нарече „пошироко“ разбирање на концептот.

Како што беше кажано, виткање или свиткување наназад (folding back) се случува со цел да се прошират постојните сфаќања кои се покажаа како несоодветни за справување со новонајавен проблем. Фактот што значењата на надворешниот слој се достапни за поддршка и за информирање на дејствата на внатрешниот слој е она што ја создава метафората на превиткување и згуснување (проширување).

Вртењето (преклопувањето) наназад може да се визуализира како преклопување на лист хартија со кој се создава подебело парче како резултат на дејството на преклопување на еден дел од листот врз другиот.

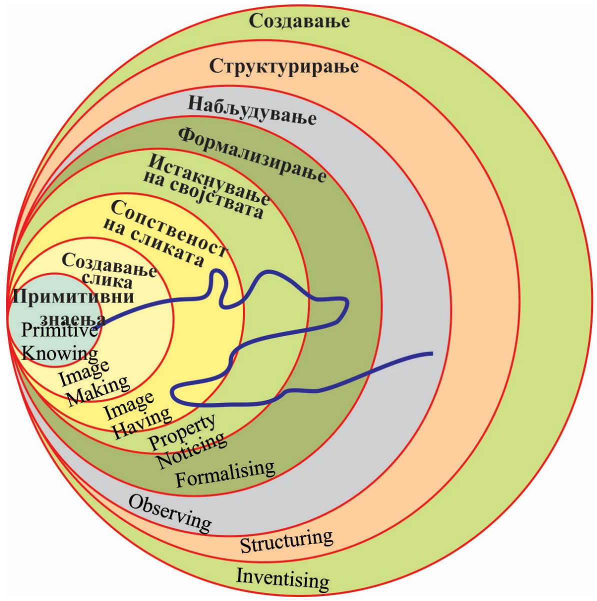
Ученикот има интернализирано различен сет на структури, променето разбирање на концептот и ова проширено разбирање дејствува за да ги информира следните активности на внатрешно ниво. Вртењето/преклопувањето е метафора за еден од процесите преку кој се гледа дека разбирањето расте и преку кој ученикот конструира и работи во математички свет кој постојано се менува.

Обезбедувањето можности за учениците да се вратат назад и да се вклучат во соодветни активности за создавање слики за специфични математички концепти би бил соодветен начин да се поттикне зголеменото разбирање на учениците и да им се овозможи да ги развијат своите вештини поприменливи.

Иако првично може да се гледа како чекор назад во однос на дејствата на ученикот што може да се набљудуваат, чекорот назад веројатно ќе доведе до подлабоко разбирање на математичкиот концепт и е суштинска фаза во динамичниот раст на математичкото разбирање (Martin et al., 2005).

Друга карактеристика на моделот Пирие-Киерен е трансцеденцијата меѓу дејството и изразувањето. Ова се манифестира преку произволна транзиција од едно на друго ниво, придвижување напред и назад како функција на задоволување на побарувачката или проширување на значењето. Со други зборови, Пирие-Киерен покажа дека растот на разбирањето оди напред-назад надополнувајќи ги дејствата изразени на секое ниво. Секое ниво вклучува претходно разбирање со цел да се обезбедат континуитет и поврзаност со внатрешното ниво (Iwata & Yasunaga, 2016).

Теоријата Пирие-Киерен претставува осум нивоа на разбирање, кои може да се користат за проучување на растот на математичкото разбирање за лица (ученици, студенти, работници) и за определена содржина, особено во посебни ситуации и контексти, со набљудување активност во многу временски периоди (на пример: час, период, возраст, одделение). Затоа, оваа теорија е алатка што му овозможува на истражувачот да го набљудува и да го опишува растот на математичкото разбирање на ученик или на група ученици за математичкиот концепт избран во определен временски период. Овие избори ги прави истражувачот и се водат од посебниот фокус на интерес (Martin et al., 2005).



Слика 20: Теоријата Пирие-Киерен

Пирие и Киерен (1991) разбирањето на математиката го гледаат како комплексен феномен што не може лесно да се подели во две или во три категории или да се вклучи во една аквизиција. Тие го опишуваат значењето на математиката како израмнет, но нелинеарен, рекурзивен феномен бидејќи човекот го поместува размислувањето меѓу нивоата на извонредност. Секое ниво на разбирање е во рамките на следното ниво и зависи од претходните нивоа (Pirie & Kieren, 1989). Нивната теорија ја разгледува природата на разбирањето како лична и реорганизирана конструкција на структурите на знаење на поединец или на група.

Прво ниво, **примитивно знаење**. Тоа не значи ниско ниво на математички знаења, туку тоа е место каде што математичкото разбирање започнува да се шири. Ова ниво се состои од сите знаења што ги има ученикот при започнување на нова математичка задача или учење за нов концепт. Нивото на примитивно знаење е темел од кој се градат сите други значења и е вградено во сите други нивоа на разбирање. Зборот „примитивен“ се користи во смисла на „примарен“, основен, прелиминарен и нема намера да пренесе пресуда за нивото на софистицираност на математичкото знаење што го има. Тоа е сѐ што некое лице има „во умот“ за тековната задача, разбирајќи ја темата што се разгледува (Gibbons, 2012).

На пример, наставникот кој планира за првпат на учениците да им го претстави значењето на дропките како примитивното знаење може да ги претпостави знаењата за поделба, поделба на еднакви делови или дека дропките може да се добијат кога делиме или сечеме нешто на еднакви делови.

На второ ниво, **создавање слика**, учениците го разликуваат своето примитивно знаење и го користат на нови начини. Тоа е важен и активен период во развојот на разбирањето. Учениците се во можност да формираат слики (слики, графикони, факти изразени со јазик, акции или броеви итн.) од нивното претходно знаење со изведување на неколку видови активности (Iwata & Yasunaga, 2016).

На пример, кога работиме со дропки, ученик од пониските одделенија може да подели половина пита или пица итн. Додека ученик од повисоките одделенија, веројатно, ќе може да ја повика апстрактната слика дека „половина е еден од два еднакви делови“, немајќи потреба да користи физички модели. Работејќи на ова ниво, на пример, ученикот формира различни слики во зависност од примитивните (основни) сознанија, се сеќава како започнува да ги интернира сликите и е во состојба да развие разбирање за да може да се пресели на следното ниво на ново знаење вкоренето во постојното знаење.

Пирие и Мартин (2002) предлагаат примена на создавањето слики како алатка за мотивирање и за охрабрување на послабите ученици во развивањето на нивното разбирање. За да се направи поефективно создавањето слики, неопходно е наставникот да ги разгледа (да се врати) со своите ученици на примитивно знаење со цел да ги користи тие информации во создавањето слики. Тој може да го стори тоа со поставување прашања што не може да се решат веднаш. Во тој процес, наставникот постојано ги охрабрува учениците во својата работа и речиси од самиот почеток ја има стратегијата да ги открие и да ги користи нивните математички знаења. Учениците на тој начин ќе развијат разбирање засновано врз размислување за проблем, а не како обид да запомнат процес. Имагинацијата управувана со слика потоа ги води учениците на начин на размислување, а не во формализиран процес (Borgen, 2006).

На трето ниво, **поседување на сликата**, ученикот го прави преминот од нивото на создавање слика на нивото на стекнување слика и ова е важен чекор во математичкото разбирање на ученикот. Овој момент се смета за прв чекор кога ученикот чувствува дека навистина разбира. На пример, на ова ниво ученикот од трето одделение може да разбере дека равенката е еден вид рамнотежа или ¾ е 3 од 4 еднакви делови.

Треба да се нагласи дека во некои случаи иако ученикот создал концептуална слика, оваа слика е нецелосна, па дури и може да биде неточна, што подоцна може да предизвика проблеми и пречки во развојот на разбирањето на некоја тема од страна на ученикот. На пример, во однос на дропките, ученикот може да ја смета половината како еден од два еднакви дела на една целина, но не како да дели голем број предмети во две групи со еднаква големина. Ова е кога ученикот може да има слика со половина големина со тоа што ќе ја дели на два еднакви дела, но не дека три од шесте лица сочинуваат половина од таа групација (Borgen, 2006).

На четврто ниво, **истакнување на својствата**, учениците почнуваат да манипулираат и да комбинираат аспекти на сликите што ги конструирале на претходните нивоа со цел да конструираат специфични контексти, како и клучни карактеристики поврзани со определена тема. Ова подразбира појава на разлики, комбинации или врски меѓу сликите и определување на врските меѓу овие различни детали. Разликата меѓу нивоата на „**поседување на сликата**“ и „истакнување на својствата“ е можност да се забележи врската меѓу сликите и да се објасни за да се проверат врските.

На пример, бидејќи ученикот знае дека бројот 4 е пола од бројот 8 и дека бројот 3 е помал од половината на бројот 7, значи за дропката $\frac{4}{8}$ разбира дека таа е половина од една величина, додека дропката $\frac{3}{7}$ е помала од половината на истата величина. Така, тој сега разбира кога дропката $\frac{4}{8}$ е поголема од другата дропка $\frac{3}{7}$.

На петто ниво, **формализација**, учениците се во можност да апстрахираат заеднички квалитет од претходната слика со цел да развијат формални математички идеи. Свесно носат размислување за набљудуваните својства и апстракции што се вообичаени за тие својства. На ова ниво, учениците прават генерализации за определени слики и почнуваат да размислуваат во однос на општите проблеми. Набљудуваните ремек-дела и генерализации на концептите направени на ова ниво може да им помогнат на учениците да развијат математички дефиниции. Јазикот се користи за да се опише дефиницијата, не треба да е формален математички јазик, но описите дадени од учениците мора да бидат општи описи и мора да бидат еквивалентни на најсоодветната математичка дефиниција (Gibbons, 2012). Така, на ова ниво се јавува генерализација и ученикот сфаќа дека еден метод се применува за сите случаи во тие категории. Со апстракција, ученикот започнува да користи повеќе формални математички активности и може да работи со концепти повеќе отколку со конкретни случаи (Borgen, 2006).

Ова ќе го илустрираме со еден пример цитиран од Пирие-Киерен (1994а), кога еден ученик работејќи во свиткување на хартија на ниво на **создавање слика** за дропките. забележал дека $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{4}{8}$ (**поседување на сликата**). Потоа тој забележал дека освен множење со 2, може да имаме и множење со 3, добивајќи притоа $\frac{1}{2}=\frac{3}{6}=\frac{9}{18}$ (**истакнување на својствата**). Тогаш возбудениот ученик рекол: „Се обложувам дека ова важи и за 7!“ Односно, тој забележал дека тоа важи за сите броеви и на овој начин го формализирал своето разбирање за дропките.

На ова ниво формализациите не треба да опфаќаат формули или симболички изрази (Gibbons, 2012).

Шестото ниво, **набљудување**, вклучува свесен обид на поединецот да го зголеми своето разбирање, имајќи веќе формализирано разбирање (Borgen, 2006). На ниво на **набљудување**, учениците почнуваат да размислуваат за формалната активност во која учествувале во нивото на формализација и се обидуваат да побараат обрасци и врски со цел да ги дефинираат своите формални идеи како алгоритми или теореми. На ова ниво, учениците се во позиција да ги организираат своите идеи на конзистентен и логичен начин и да создаваат теории засновани врз нивните идеи. По развивањето на нивните идеи во теории во рамките на набљудувањето, природно очекување е да се утврди дали нивните теории се вистинити или не.

Откако ќе развие формални идеи за еднакви дропки и за собирање на дропките со заеднички именител, ученикот може да го најде збирот на дропките со различен именител. На пример, ученикот може да го најде збирот на дропките $\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{3}$ со наоѓање на збирот на дропките $\frac{3}{12}$ и $\frac{4}{12}$.

На седмото ниво, **структурирање**, учениците ги оправдуваат или ги верификуваат своите математички теории со расудување и со докази. За поцелосно разбирање, учениците треба да бидат во можност да одговорат зошто нивните формални набљудувања може да бидат вистинити или зошто нивните набљудувања можеби не се точни. Учениците на ниво на структурирање може да бидат насочени да тестираат дали квадратните функции имаат вистински корени или не (Gibbons, 2012). Генерализираниот однос тогаш им дава можност да размислат за определени модели бидејќи се во состојба да го поврзат постојното знаење на друга област или на друг аспект на знаење (Iwata & Yasunaga, 2016).

Илустративен пример за **структурирана** врска е случајот кога ученикот, знаејќи за проширувањето на дропките, може да го изведе правилото за собирање дропки со различни именители. Значи, $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot d}+\frac{c\cdot b}{d\cdot b}=\frac{a\cdot d+c\cdot b}{b\cdot d}$.

На последното ниво, **создавање**, учениците се во можност да избегаат од формите на структурно разбирање што ги изградиле порано, да поставуваат нови прашања што може да доведат до процес на градење ново и различно значење или концепт. На ова ниво на разбирање, математичкото разбирање е неограничено и ја надминува сегашната структура за да го помисли прашањето „што ако?“.

На пример, учениците на ниво на создавање може да го постават прашањето: Каква е врската меѓу множењето на именителот и вредноста на дропката?

Ученикот успева да сфати дека дропката $\frac{a}{b}$ се намалува за m пати ако нејзиниот именител се зголемува m пати.

Во продолжение го анализираме примерот на Јапонија каде што успешно ја примениле Теоријата Пирие-Киерен во развојот и во проширувањето на математичкото разбирање.

Во Јапонија, Теоријата Пирие-Киерен се гледа како корисен модел во визуализирање на процесот на математичкото разбирање. Овој заклучок е извлечен од напорите на јапонските истражувачи да одговорат на прашањето која алатка, метод или стратегија ги спречува учениците да размислуваат за математика? И која алатка, метод или стратегија помага да се зголеми и да се прошири математичкото разбирање на ученикот?

Јапонските истражувачи тврдат дека Теоријата Пирие-Киерен како рекурзивна и трансцендентална теорија се заснова врз две поврзани идеи:

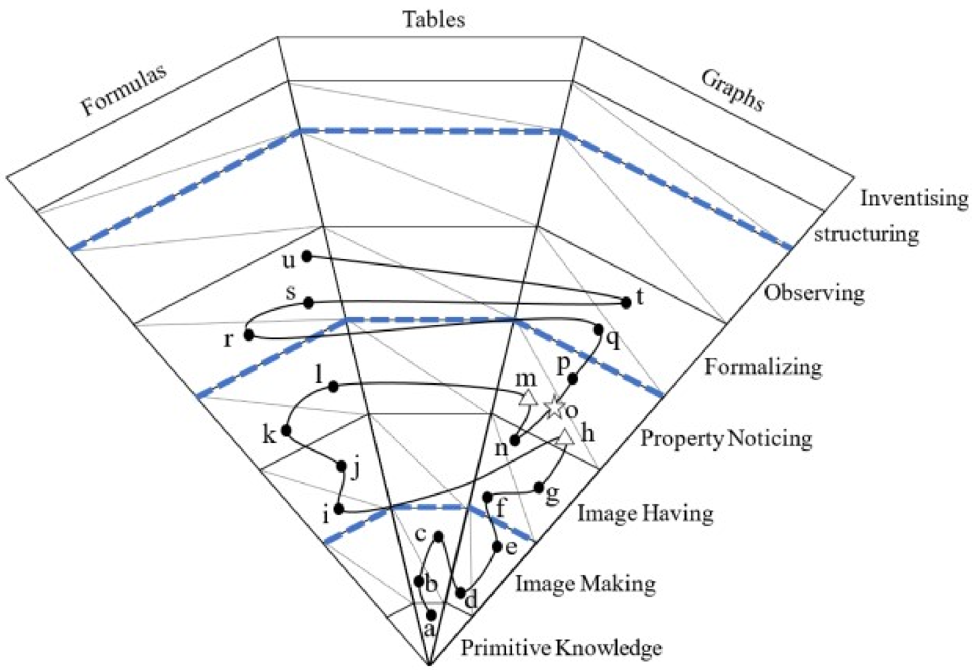
- Конструктивистичката филозофија, бидејќи таа (Теоријата Пирие-Киерен) го гледа разбирањето како континуиран процес на организирање на когнитивните структури.

- Идејата за трансцендентална рекурзија, која е методологија за опишување на растот на разбирањето на учениците од конструктивистичка перспектива.

Спротивно на тоа, на моделот Пирие-Киерен се гледа како на леќа преку која се гледаат искуствата на учениците за разбирање на математиката и за решавање математички проблеми (Nakamura & Koyama, 2018).

Табела 5: Содржини од осум нивоа на моделот, дефинирани од Iwata et al., (2016), вклучително и ставки и содржини на постапување и на изразување

Ниво	Содржина	
	Дејствување	Изразување
Примитивно знаење		
Знаењето што го има ученикот, како и однесувањето што треба да може да направи.		
Создавање слика	**Слика**	**Повторно слика**
Ученикот создава нова слика работејќи нови задачи со конкретни работи: дијаграми, графикони и симболи.	Ученикот изведува дејства со конкретни работи, дијаграми, графикони и симболи без да размислува за чинот.	Ученикот создава нова слика преку размислување за чинот.
Поседување на сликата	**Поседување на сликата**	**Опис на сликата**
Ученикот јасно може да ги наведе карактеристиките на сликата без да прави конкретни дејства што водат до сликата.	Ученикот забележува дека ја поседува сликата, но не може јасно да ги изрази нејзините карактеристики.	Ученикот јасно ги изразува карактеристиките на сликата.
Истакнување на својствата	**Предвидени својства**	**Опис на својствата**
Ученикот ги поврзува сликите една со друга и ја забележува разликата меѓу сликите со рефлексивно разбирање на повеќекратните слики што ги поседува.	Ученикот се обидува да ги предвиди својствата преку поврзување на сликите една со друга или преку разгледување на разликите меѓу сликите, но не може јасно да ги изрази својствата.	Ученикот докажува дека умее јасно да ги изрази предвидените својства.
Формализирање	**Примена на правилото**	**Образложение на правилото**
Ученикот наоѓа правило што функционира во секој случај без да се повикува на неговиот физички модел или на конкретна слика.	Ученикот може да најде правило и да го претстави со симболи без физички модели и конкретни слики, но сѐ уште не е во состојба да го оправда правилото.	Ученикот е способен да го оправда правилото.
Набљудување	**Идентификација на карактеристиките**	**Определување на карактеристиките**
Ученикот ги наоѓа карактеристиките на формализирањето преку корелација на повеќекратните формализирања и забележување на разликите меѓу нив.	Ученикот размислува за формализирањето и за пронаоѓањето на карактеристиките, но сѐ уште не е во состојба јасно да ги изрази.	Ученикот јасно ги изразува пронајдените карактеристики.
Структурирање	**Фрагментација на теоремата**	**Доказ за теоремата**
Ученикот создава структура на набљудуваните резултати преку пронаоѓање на нивните меѓусебни врски и нивно оправдување.	Ученикот извлекува определен предлог од реципрочната врска на набљудуваните резултати, но сѐ уште не е во состојба да го докаже тоа.	Ученикот го изведува доказот врз основа на заклучениот предлог.
Создавање		
Ученикот оди подалеку од претходниот начин на размислување користен за ова разбирање и создава нови прашања за да ги прошири новите концепти засновани на структурирано разбирање.		



Слика 21: Илустрирање на процесот на градење, развивање и проширување на разбирањето (за дадена содржина) кај учениците вклучени во истражувањето

Употребата на Теоријата Пирие-Киерен во изградбата, развојот и проширувањето на математичкото разбирање се покажува како доста успешна и како таква ја среќаваме во образовните системи на многу напредни земји. Од прегледаната литература во текот на периодот на моите докторски студии, како и од резултатите од моето истражување, успеав да забележам неколку предности на Теоријата Пирие-Киерен во однос на традиционалните пристапи за учење математика.

Теоријата Пирие-Киерен, со сите свои карактеристики споменати погоре, јасно ги дефинира сопствените нивоа на разбирање и со тоа дава фундаментално разбирање за напредокот на математичкото разбирање преку идентификување и објаснување на фазите на развојот на разбирањето. Во овој случај, наставниците подобро може да ги разберат проблемите и потребите на учениците во разбирањето и да развијат соодветни наставни стратегии за нивно решавање.

Друг аспект на употребата на Теоријата Пирие-Киерен е нејзината употреба во процесот на дизајнирање наставни програми и учебници по математика, правејќи ги поусогласени, меѓусебно поврзани и во функција едни на други, како и приспособување кон возраста и кон когнитивните способности на учениците. Со истата логика и пристап, може да ја користат и наставниците при создавање на сопствените програми за работа, како и на писмените подготовки за наставните единици.

Теоријата Пирие-Киерен може да се користи како многу ефикасен филтер и за различни анализи и проценки на програми, учебници, определени математички содржини.

Исто така, може да се користи при создавање на тестови и други инструменти за различни проценки на учениците. Во овој случај, барањата на овие тестови или инструменти за оценување би биле поставени во логична хиерархија и редослед, според критериумите или нивоата на тежина.

Накратко, Теоријата Пирие-Киерен обезбедува рамка за разбирање и за решавање на напредокот на развојот на математичкото разбирање кај учениците.

II. ДЕЛ

2. МЕТОДОЛОГИЈА НА ИСТРАЖУВАЊЕТО

2.1. Предмет на истражување

Како што рековме погоре, дропките се многу важна содржина не само во математичкото образование туку и во општото образование на поединецот. Поради оваа причина, наставата и учењето на дропките е важно прашање, но исто така многу проблематично и многу предизвикувачко за наставниците и за учениците. Овој проблем се среќава насекаде во светот и како таков стана предмет на многу студии и истражувања низ светот, додека во Косово како и во нашиот регион недостигаат сериозни истражувања и студии поврзани со наставата и учењето дропки. Ова беше главниот поттик да се пристапи кон проблемот со учењето дропки во основното образование во Косово, експериментирајќи со употребата на Теоријата Пирие-Киерен како една од најефикасните теории во градењето и проширувањето на математичкото разбирање.

Предмет на нашето истражување е учењето на дропките кај учениците од III, IV и V одделение од основното образование во Косово, поточно ефектите од примената на Теоријата Пирие-Киерен во процесот на развивање и проширување на разбирањето на дропките меѓу учениците од основното училиште (III, IV и V одделение) во Косово.

Во однос на ова, особено го анализиравме третманот на дропките во програмите и во учебниците од III, IV и V одделение во Косово, општите насоки за спроведување на Наставната програма за основно образование и особено оние од предметот Математика. Предмет на нашата анализа се и меѓународните пристапи во наставните програми и учебниците, како и методологиите во третманот на дропките во основното образование за нивна споредба со косовскиот пристап. Посебно значење посветивме на изнаоѓање и истражување модели во кои се наоѓа присуството на Теоријата Пирие-Киерен, со цел да обезбедиме референци за време на процесот на подготовка на материјалите во согласност со Теоријата Пирие-Киерен за наставниците и за учениците од експерименталните паралелки, вклучени во нашето истражување.

2.2. Дефинирање поими

Оперативните дефиниции ги формулиравме на таков начин што концептите кои се дел и предмет на нашето истражување може да се претворат во оперативни термини, и како такви ги дефиниравме на практичен, воочлив и мерлив начин. Значи, ние ги трансформираме концептите во варијабли, директно или преку збир на индикатори.

Дропка – Бројот напишан како $\frac{a}{b}$ каде што a е цел број додека b е ненулта цел број ($b \neq 0$) се нарекува дропка. Бројот a се нарекува броител, додека b е именителот на дропката. Дропка претставува дел од целина или број на еднакви делови од целината. Именителот покажува на колку еднакви делови е поделено целото, додека броителот покажува колку од тие делови сме зеле или сме разграничиле (Turcan, n.d.).

Разбирање – Разбирањето е психолошки процес што се однесува на апстрактен или на физички предмет, како што е личност, ситуација или информација за која некој може да размислува и притоа да користи концепти за нивно објаснување (Scardamalia & Bereiter, 2006).

Настава со разбирање – се однесува на учење што го насочува ученикот да прави низа дејства кои го стимулираат неговото размислување за концептот, како што се објаснување, наоѓање докази во примери, обопштување, примени, правење аналогии и претставување концепти на нови начини (WAUKEE, 2018).

Наставна програма – (програма за воспитно-образовната работа) документ со кој се утврдуваат целите, содржините, образовната технологија и вреднувањето на севкупните постигања на учениците по определен наставен предмет на определено образовно ниво (Малчески, 2010).

Учебник – може да се дефинира како печатена публикација структурирана на таков начин што се користи во процесот на учење за да се зголеми неговата ефикасност (Zherar & Rozhje, 2003).

2.3. Проблем на истражувањето

Проблемот на истражување на оваа научноистражувачка работа е фокусиран на ефектите од примената на Теоријата Пирие-Киерен во разбирањето на дропките. Соодветно, колку Теоријата (моделот) Пирие-Киерен е ефикасен модел во процесот на развивање и проширување на разбирањето на дропките кај учениците во одделенската настава (III-V одделение) во Косово?

2.4. Цел на истражувањето

Цел на ова истражување е експериментално да се споредат ефектите од примената на Теоријата (моделот) Пирие-Киерен во процесот на развивање и проширување на разбирањето на дропките кај учениците во одделенската настава (III, IV и V одделение) во Косово.

Оваа цел ни овозможува емпириски да црпиме знаења за различните аспекти на третманот на дропките во III, IV и V одделение во основното образование во Косово, а особено за ефектите предизвикани од употребата на Теоријата Пирие-Киерен во процесот на развој и проширување на разбирањето на дропките кај учениците од III, IV и V одделение во основното образование во Косово.

2.5. Хипотези и задачи на истражувањето

Од проблемот и целта на нашето истражување, произлегуваат следните **хипотези** на нашето истражување:

1. Се претпоставува дека содржините на дропките во програмите и во учебниците по математика не се поставени и определени на логичен начин.

2. Се претпоставува дека ефикасноста на процесите на учење/совладување на наставната единица „Дропки“ преку употребата на моделот Пирие-Киерен е поголема во споредба со традиционалните модели.

3. Се претпоставува дека Теоријата Пирие-Киерен е ефективен модел во процесот на градење и проширување на разбирањето на дропките кај учениците од основното образование (III, IV и V одделение).

Со цел да се тестира автентичноста на хипотезите покренати од нашето истражување, беше потребно да се реализираат следните **задачи**:

- Да се истражи како се претставени дропките во наставните програми и во учебниците по математика и дали содржината е логично организирана (преку анализа на педагошката документација).

- Да се докаже присуство на статистички значајна разлики меѓу знаењето на учениците кога наставата се организира според Теоријата Пирие-Киерен во однос на знаењето на учениците кога наставата се организира според сегашните наставни модели (преку тестови за III, IV и V одд.).

- Да се докаже дека Теоријата Пирие-Киерен е ефективен модел во процесот на градење и проширување на разбирањето на дропките кај учениците од основното образование во Косово (преку експерименти, тестови).

2.6. Варијабли

Како што објаснивме во оперативните дефиниции, варијаблите претставуваат слики, перцепции или концепти кои може да се мерат и како такви може да имаат различни вредности.

Бидејќи нашето истражување е квантитативно со експериментален дизајн (контролирано и планирано), имаме два вида независни варијабили:

Активни варијабли, кои може да се манипулираат, да се менуваат и да се контролираат, а во нашето истражување како таква ја имаме Теоријата Пирие-Киерен, односно писмени подготовки за наставниците и работните листови за учениците подготвени во согласност со Теоријата Пирие-Киерен.

Променливи со атрибути, кои не може да се манипулираат, да се менуваат или да се контролираат. Тие ги претставуваат карактеристиките на населението, а во нашето истражување како такви ги имаме одделението (возраста) на учениците и локацијата на училиштата.

Како зависна варијабла е земено разбирањето на дропките.

Од гледна точка на мерната единица, зависната варијабла (разбирањето на дропките) има дихотомен тип на категоризација (точно/неточно).

2.7. Примерок на истражувањето

Примерокот на нашето истражување вклучува ученици и наставници од три училишта, ОУ „Паварсија“ од Приштина, ОУ „Бафти Хаџиу“ од Витина и ОУ „Дешморет е Витисе“ од Витина. Од секое училиште беа избрани по две одделенија од III, IV и V одделение (при што едното е експериментално, а другото контролно одделение).

Изборот на примерокот е наменски (наменски примерок). Се обидовме да вклучиме ученици и наставници од различни региони и области за да биде примерокот што е можно повеќе порепрезентативен.

2.8. Методи, техники и инструменти на истражувањето

Методи

Во нашето истражување „Концептот на дропките според Теоријата на Пирие-Киерен во почетното математичко образование“ ги користевме дескриптивниот и експерименталниот метод.

Дескриптивниот метод го користевме при собирање, обработка и интерпретација на податоците.

Експерименталниот метод го користевме во делот од трудот што се однесува на споредбата на ефектите од наставата според Теоријата Пирие-Киерен. Преку овој метод имавме за цел да испитаме колку моделот на настава и учење според оваа теорија е ефективен модел во процесот на градење и проширување на разбирањето на дропките и дали тој степен е поголем отколку на часовите организирани со актуелните методи на работа во училница.

Техники

За да ја докажеме статистичката разлика меѓу експерименталната и контролната група, го користевме методот на тестирање.

Процесот на тестирање го извршивме преку овие чекори:

- Дизајнирање и подготовка на тестови.
- Реализација и надзор на процесот на тестирање.
- Контрола и обработка на податоци.

Во текот на овој процес се погриживме да дизајнираме различни инструменти и активности, а сето тоа во согласност со Теоријата Пирие-Киерен.

2.9. Хронологија на нашите истражувачки активности

Хронологијата на извршување на активностите на ова истражување опфаќа низа активности спроведени во подолг временски период. Моите интереси за учењето на дропките се од поодамна. Ова прашање беше предмет и на мојот магистерски труд.

Прво, ја анализиравме педагошката документација во Косово, фокусирајќи се на содржината на дропките.

Потоа ги анализиравме наставните програми и учебниците по математика за да ги видиме и да ги разбереме што е можно посеопфатно различните аспекти на справување со дропките во нив. Откако ги констатиравме недостатоците и пропустите во нив, изготвивме писмени подготовки за наставниците и работни листови за учениците од експерименталните паралелки.

Во текот на нивната подготовка се погриживме да направиме различни стратегии, инструменти и активности, во согласност со Теоријата Пирие-Киерен, на таков начин што може да истражиме како се менуваат перформансите на учениците во разбирањето на дропките кога дропките се објаснуваат според Теоријата Пирие-Киерен (како модел). Во текот на овој процес испитавме различни аспекти и контексти, како што се делење, споредба, операции со дропки.

Потоа, ги анализиравме добиените резултати кои ги истакнаа предностите на Теоријата Пирие-Киерен во разбирањето на дропките. Ова го направивме обидувајќи се да одговориме на прашањата поставени во текот на ова истражување во обид да ги докажеме хипотезите што ги поставивме на почетокот на нашето истражување.

Конечно, се погриживме да извлечеме и да изготвиме заклучоци и препораки кои се надеваме дека ќе послужат за подобрување на процесот на наставата и учењето на дропките во основното образование, но и на другите образовни нивоа.

III. ДЕЛ

3. РЕЗУЛТАТИ ОД ИСТРАЖУВАЊЕТО

Во овој дел ќе зборуваме за резултатите од нашето истражување „Концептот на дропките според Теоријата Пирие-Киерен во почетното математичко образование“.

Дел од анализата на нашето истражување се и пристапите кон третманот на дропките, како и деловите од програмите и од учебниците на неколку различни земји во светот во кои се третираат дропките. Во оваа прилика ги анализиравме проблемите во учењето на дропките кои се идентификувани во овие земји, како и нивните „рецепти“ за пристап, за подобрување и за отстранување на овие проблеми.

Исто така, предмет на нашата истражувачка анализа се: програмите и учебниците од III, IV и V одделение, писмените подготовки за наставниците и за учениците од експерименталните паралелки, а на самиот крај резултатите од тестовите за III, IV и V одделение во врска со ефектите од користењето на Теоријата Пирие-Киерен.

Нашето истражување е експериментално и има за цел: експериментално да ги спореди ефектите од примената на Теоријата (моделот) Пирие-Киерен во процесот на развивање и проширување на разбирањето на дропките кај учениците од основните училишта (III, IV и V одделение) во Косово.

За да ја ориентираме нашата истражувачка работа, од самиот почеток изготвивме истражувачки хипотези:

1. Се претпоставува дека содржините за дропките во наставните програми и во учебниците по математика не се логички распоредени.

2. Се претпоставува дека ефикасноста на процесите на учење/совладување на наставната единица „Дропки“ преку употребата на Теоријата Пирие-Киерен е поголема во споредба со традиционалните модели.

3. Се претпоставува дека Теоријата (моделот) Пирие-Киерен е ефикасен модел во процесот на разбирање и проширување на разбирањето на дропките кај учениците во одделенска настава.

3.1. Третман на дропките во основното образование во Косово (III, IV и V одделение)

3.1.1. Дропките во наставните програми по математика во Косово

Организирањето на математичките содржини во наставните програми по математика во Косово се врши преку категории. Од прво одделение, па сè до петто одделение ги имаме овие четири категории:

- Множества и релации
- Аритметика и алгебра
- Геометрија и мерења
- Обработка на податоци

Овие категории потоа се организираат во поткатегории и во наставни теми. Исто така, се градат специфични резултати за секое ниво на образование и за секое одделение.

Слика 22: Организирање на математичките содржини (преземено и адаптирано од Brada, 1970)

Дропките се обработуваат во категоријата Броеви, алгебра и функции.

Општиот фонд на часови за областа математика изнесува: 37 недели x 4 наставни часа/во недела = 148 наставни часа. Во наставните програми на Косово нема поделба на бројот на наставни часови за определена категорија, содржина или концепт, како што се прави на многу други места.

Во Косово дропките првпат се учат во трето одделение. Од образовните програми што ги изготвува Министерството за образование (MASHT), учениците во III одделение прво учат за почетно разбирање на дропките; еднакви дропки; споредување дропки со ист именител или броител; како и собирање и одземање дропки со ист именител (MASHT, 2019).

Во Наставната програма по математика за трето одделение, за дропките има многу кратка и многу општа листа на исходи од учењето, иако децата за првпат се запознаваат со нив. Сметаме дека оваа листа на исходи од учењето за дропките треба да биде подолга и посеопфатна за да им помогне на наставниците, но и на авторите на учебниците во создавањето на содржините за дропки. Конкретно, треба да има повеќе резултати и простор за справување со првичните сфаќања за дропките, како и во разјаснувањето на значењето на нивните елементи (именител и броител).

И покрај малиот број на овие резултати од учењето, дури и оние неколку, се дадени по нелогичен редослед. На пример, како може еден ученик (особено третоодделенец) да разликува дропки што покажуваат ист дел од целината (рез. 2) пред да може да го определи делот од целината (рез. 3).

Табела 6: Преглед на рангирањето на резултатите од учењето според Наставните програми по математика за III одделение за темата „Дропки“

Рангирање на резултатите од учењето дропки според Наставната програма	Логично преуредување на резултатите од учењето
1. Претставува графички прикази на дропки како дробни броеви; 2. Разликува дропки кои покажуваат ист дел од целина; 3. Означува дел од целина; 4. Споредува дропки со ист именител/броител; 5. Собира и одзема дропки со ист именител.	1. Претставува графички прикази на дропки како дробни броеви; 2. Означува дел од целина (рез. 3); 3. Разликува дропки кои покажуваат ист дел од целина (рез. 2); 4. Споредува дропки со ист именител/броител; 5. Собира и одзема дропки со ист именител.

Во четврто одделение се објаснуваат значењето на именителот и на броителот на дропките преку графички прикази, конкретни материјали, зборови и симболички белешки; слично се врши и претставувањето на дропките како делови од броевите; потоа продолжува со појаснување како се формираат еднакви дропки преку проширување на дропките (прикажано преку разни илустрации); определување дропки чија вредност е помала од 1, оние еднакви на 1, како и наоѓање (определување) дропки кои се еднакви на 1 (еден). Сето ова е разјаснето и оправдано со соодветни процедури (MASHT, 2020).
Во Наставната програма за четврто одделение имаме нелогичен редослед на исходите од учењето.

На пример, како може да зборуваме за споредување дропки со ист именител (рез. 3), а потоа да зборуваме за собирање и одземање дропки со ист именител (рез. 5), нешто што треба да биде на самиот крај од листата на резултати од учењето, а потоа повторно се враќаме на резултатите (содржините) поврзани со споредбата на дропките, како што се резултатите 4, 7, 9, 6 и 10.

Ова нелогично определување на исходите од учењето на дропките во Наставните програми по математика за четврто одделение ги прави нефункционални едни со други. Учењето на дропките по овој редослед предизвикува конфузија и кај наставниците и кај учениците и покрај фактот што содржината на дропките сама по себе се смета за доста сложена содржина.

За повеќе детали, видете ја табелата подолу.

Во првата колона има рангирање на резултатите од учењето според Наставната програма по математика за четврто одделение, за темата „Дропки“, додека во втората колона го направивме логичното рангирање на истите резултати со тоа што ги ставивме по логичен редослед и во функција едни на други.

Табела 7: Преглед на рангирањето на резултатите од учењето според Наставните програми по математика за IV одделение за темата „Дропки“

Рангирање на резултатите од учењето според Наставната програма	Логично преуредување на резултатите од учењето
1. Графичките прикази на дропките се претставени како дропки и обратно; 2. Претставува дропки користејќи конкретни материјали, зборови и едноставни симболи на дропки и го објаснува значењето на именителот и броителот; 3. Споредува дропки со ист именител; 4. Определува дел од број; 5. Врши операции со собирање и одземање со дропки со ист именител; 6. Формира еднакви дропки со нивно проширување (користи слики и цртежи); 7. Определува дропки помали од 1 и еднакви на 1; 8. Решава зборовни задачи (од секојдневниот живот) со помош на дропки; 9. Определува дропка за да стигне до целината и го оправдува дејството; 10. Ја демонстрира и ја објаснува врската на еквивалентни дропки користејќи бетонски материјали.	1. Графички прикази на дропки што ги прикажуваат како дропки и обратно (рез. 1); 2. Претставува дропки користејќи конкретни материјали, зборови и едноставни симболи на дропки и го објаснува значењето на именителот и броителот (рез. 2); 3. Определува дел од бројот (рез. 4); 4. Определува дропки помали од 1 и еднакви на 1 (рез. 7); 5. Ја определува дропката за да стигне до целината и го оправдува дејството (рез. 9); 6. Формира еднакви дропки со нивно проширување (користи слики и цртежи) (рез. 6); 7. Ја демонстрира и ја објаснува врската со еквивалентни дропки користејќи бетонски материјали (рез. 10); 8. Споредува дропки со ист именител (рез. 3); 9. Врши операции со собирање и одземање дропки со ист именител (рез. 5); 10. Решава зборовни задачи (од секојдневниот живот) со помош на дропки (рез. 8).

За петто одделение во учебната 2021/2022 година за областа математика се користени старите наставни програми направени во 2005 година, според кои знаењата за дропките се прошируваат со собирање и одземање дропки со исти и со различни именители, со можност за претворање на дропките со ист именител.

Дропките во Наставната програма за петто одделение се опфатени само во четири поттеми во рамките на темата „Рационални броеви“.

Рационални броеви:

- Дропки (повторување и засилување на претходното познавање на дропките).
- Собирање и одземање дропки со ист именител.
- Собирање и одземање дропки со различни именители и нивно претворање во еднакви дропки со ист именител.
- Дел од број (2/3 од 12).

Поради овие недостатоци во исходите од учењето (барањата) и по број и по содржина, тие ниту ги појаснуваат ниту ги водат авторите или наставниците при создавањето содржини за дропки.

Слика 23: Дропките во Наставните програми на Косово во III, IV и V одделение

Од општата анализа на Наставните програми по математика за III, IV и V одделение во однос на дропките, изразен е недостатокот на логички врски меѓу содржините. Лесно е да се добие впечаток дека третманот на дропките во Наставната програма за определено одделение започнува од почеток, од нула, без да се смета на претходното знаење на учениците добиено од претходните одделенија.

Математичките програми во Косово се многу обопштени и тие, главно, се засноваат врз исходите од учењето, кои повеќе ги опишуваат општите аспекти на математичката компетентност. Имаше напори за време на промените на Наставната програма 2011/2014, но оние со некаква форма стагнираат. Некако одговорните тела за образованието во Косово како да беа задоволни од изготвувањето општи основни документи за различни нивоа на образование, па и за наставните области, без да застанат на изготвување документи, стратегии што го олеснуваат наставниот процес за области, содржини и определени концепти. Овие недостатоци се рефлектираат и во областа на математиката, а особено во содржината на дропките, и покрај тоа што нивното учење се смета за најпроблематично.

Во Косово има повеќе ад хок пристапи во однос на содржината на дропките при што сè уште доминира изразеното присуство на застарени пристапи. Косово треба да ги следи и да ги приспособи примерите и моделите на земјите со традиција во учењето математика, и особено во учењето дропки, исто како што тоа го прават некои од соседните земји на Косово, како Северна Македонија, Албанија, Црна Гора итн.

Споредувајќи ги содржините на програмите за дропки на Северна Македонија и Косово, забележуваме дека оние во Северна Македонија се посуштински, поструктурирани и поконцентрирани на разбирање на дропките, како и дека содржат методолошки и дидактички упатства за постигнување на очекуваните резултати. Секако, тоа се случува и поради фактот што овие програми се подготвени во соработка меѓу Cambridge International Examination (https://www.cambridgeinternational.org/) и Бирото за развој на образованието (https://www.bro.gov.mk/). Исто така, во Наставните програми по математика во Северна Македонија забележавме присуство на препораки од истражувачи и од релевантни институции и како резултат на тоа може да заклучиме дека тие се повеќе поврзани со најдобрите светски програми и практики за подучување дропки.

Иако предуниверзитетскиот образовен систем во Албанија ја има спроведено истата наставна програма како во Косово, релевантните образовни институции на Албанија подготвија серија документи и стратегии за определени области, предмети, содржини и концепти кои го олеснуваат процесот на настава и учење математика.

Што се однесува до Косово, може да кажеме дека неговите одговорни образовни институции не упатуваат доволно на примери на модели на земји со традиции и со напредни образовни системи и покрај нивната подготвеност да помогнат во оваа насока. За ова, мислам дека Косово, поточно неговите надлежни институции треба да формираат професионални тимови со широка вклученост на сите заинтересирани страни со цел да се истражува времето (возраст, одделение) и да се создадат стратегии и најефективни методи за учење дропки. Косово треба да ја искористи подготвеноста на меѓународните институции, како UNESCO, OECD, Светска банка, ЕУ и некои пријателски земји кои сакаат да помогнат во процесот на создавање наставни програми и учебници, како и методологии и наставни алатки што ќе бидат поефективни во наставата со дропки.

3.1.2. Дропките во учебниците за III, IV и V одделение во Косово

Во Косово во учебната 2021/2022 година за настава по Математика во III, IV и V одделение се користат следниве учебници:

За III одделение „Математика 3“ и „Математика 3 – Работна тетратка“; за IV одделение „Математика 4“ и „Математика 4 – Работна тетратка“; за V одделение „Математика 5“ и „Математика 5 – Работна тетратка“. Сите овие учебници се од истите автори – Рамадан Зејнулаху и Сејди Билали и од истата издавачка куќа „Дукаѓини“ од Пеќ.

Во основниот текст од III одделение дропките се разработуваат од 151. до 156. страница, а во Работната тетратка од 92. до 94. страница. И двата текста се објавени во 2005 година.

Во учебникот се опфатени следните содржини за дропките:

- Основно познавање на дропки, стр. 151. и 152.
- Дропки што покажуваат ист дел од целина, стр. 153. и 154.

- Определување дел од целина, стр. 155.
- Споредување дропки, стр. 156.

Додека во Работната тетратка, дропките се третираат само под еден наслов:

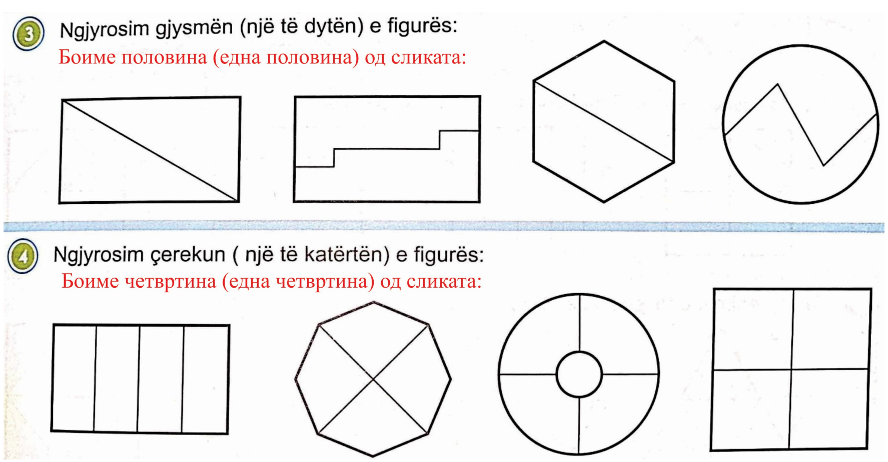
- Основно познавање на дропки, стр. 92., 93. и 94.

Од почетокот (стр. 151.), кога се прикажуваат дропки за учење, се забележува нивното неправилно прикажување. Наместо полека и лесно да ги запознаваме учениците со концептот на дропки, имаме директен вовед, без да се земе предвид фактот дека тие првпат се поставуваат пред учениците.

Јасно е дека воопшто не се земаат предвид препораките на експертите и на методичарите кои препорачуваат прво да се користат наједноставните модели со вертикална поделба. Во учебниците наидуваме на примери на репрезентативни модели кои лесно може да ги збунат учениците, како што се примерите 3 и 4 (стр. 151.).

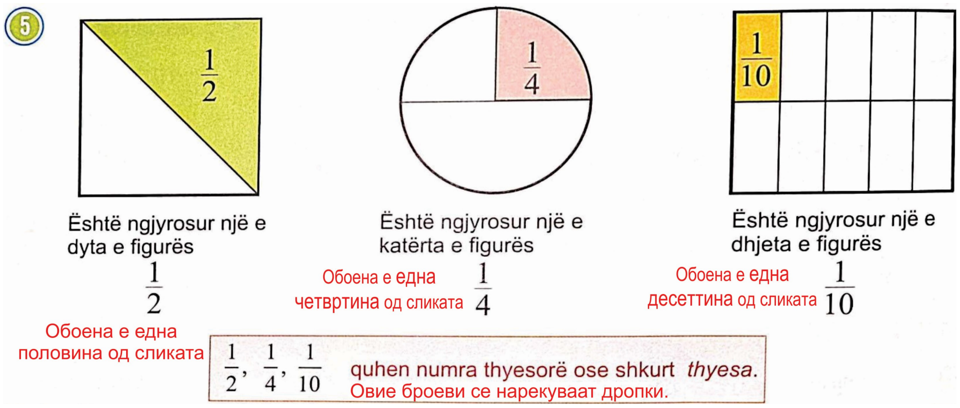
Во примерот 3, фигурите се поделени на два еднакви дела на тој начин што когнитивните способности на ученикот од ова одделение (оваа возраст) не му дозволуваат да воочи дека фигурите се поделени на два еднакви дела. Значи, воопшто не беше земена предвид високонотираната препорака според која кога фигурите се делат на два еднакви дела, поделбата треба да биде вертикална.

Во примерот 4, во кој се бара да се обои четвртина (1/4), третата фигура е многу збунувачка за ученикот бидејќи малиот круг во средината предизвикува збунетост. Што да се прави со тоа? Дали е дел од сликата или не?



Слика 24: Несоодветно репрезентативни модели на дропки

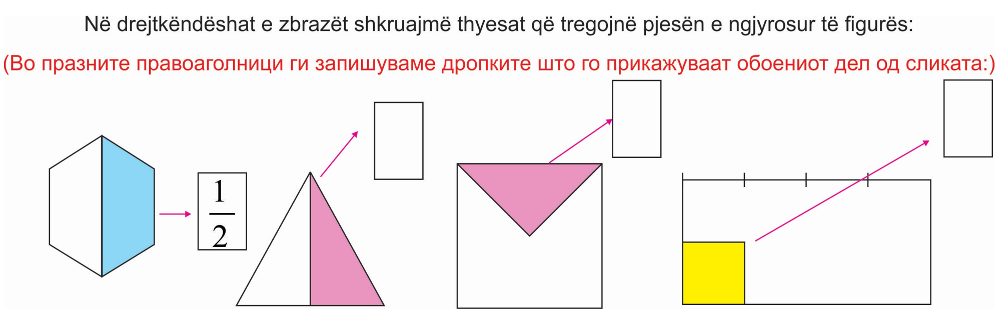
Дури и примерот 5 (стр. 152.), во кој втората слика покажува дека ¼ од сликата е обоена, е целосно спротивен на препораките за тоа како дропките треба да им се претставаат на учениците за првпат бидејќи фигурата не е поделена на еднакви делови.



Слика 25: Несоодветно репрезентативни модели на дропки

Иако овие два учебници се напишани од исти автори, меѓу нив нема меѓусебна поврзаност и како такви не се исклучуваат меѓусебно. Во Работната тетратка дропките се третираат на сите три страници и под еден наслов „Почетно познавање на дропките“ без јасно да се поделат содржините, барањата и задачите според соодветните теми предвидени со Наставната програма.

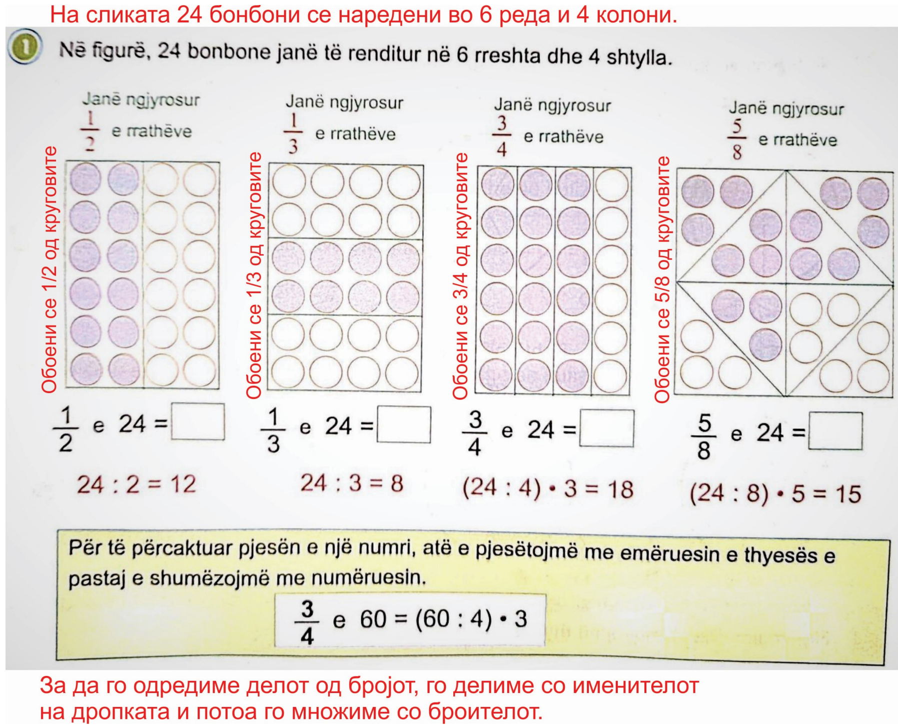
Така, и во Работната тетратка се среќаваме со истите недостатоци и пропусти. Во примерот 1 (стр. 93., Слика 26) каде што се бара да се напишат дропките што го прикажуваат обоениот дел од фигурите, третата и четвртата слика не покажуваат поделба на еднакви делови од целината.



Слика 26: Несоодветно репрезентативни модели на дропки

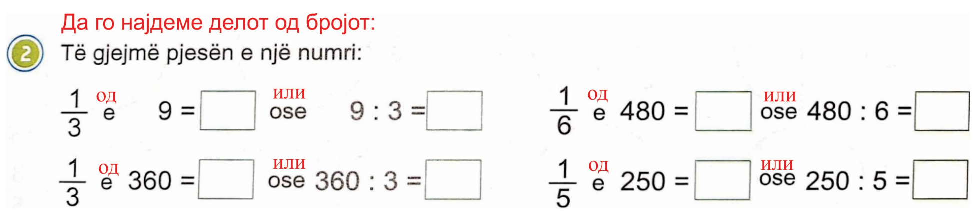
Во третата наставна единица „Определување на дел од целина“ (учебник, стр. 155., Слика 27), преку само еден пример (пример 1) се прави обид да се извлечат и да се формализираат правилата како да се определи делот од целината, што е многу недоволно. Секако, за ова би требало да се земат повеќе примери и од различни контексти.

За почеток, илустрацијата е крајно збунувачка и како да не е доволна оваа конфузија која дополнително се зголемува кога зборовите опишуваат дека се дадени 24 бонбони, додека на илустрацијата се прикажани 24 кругови. И на самиот крај се дадени правилата за определување на дел од број (а не целина)!?



Слика 27: Илустрација на примера како се определува (пресметува) делот од целината

Најголемиот недостаток и пропуст се забележани во примерот 2 (учебник, стр. 155., Слика 28). Потребно е да се пресмета дропка од број (на пример, 1/3 од 9), за што менталните вештини на третоодделенец не се баш соодветни. И на крајот, оваа содржина е надвор од Наставната програма по математика за трето одделение.



Слика 28: Барања и содржини што ги надминуваат комуникативните капацитети на ученикот, а кои се надвор од Наставната програма по математика за III одделение

Наставната единица „Споредување дропки“ (учебник, страница 156.), која зборува за споредување дропки со ист именител или броител, е повеќе структурирана од другите единици, на пример, илустрациите се позначајни. Сепак, сметам дека треба да има поголем број примери илустрирани со слики и со предмети и од различни контексти, од кои ученикот полесно ќе ја разбере споредбата на дропките со ист именител или броител, за подоцна на крајот од единицата за учење да може да формулира и да формализира заклучоци во однос на споредбата на дропките, било со ист именител или со ист броител.

Во Работната тетратка не наоѓаме никаков пример во однос на споредбата на дропките, што говори за неповрзаноста на овие два текста.

Во двата учебници воопшто не се третирани собирањето и одземањето дропки со ист именител, иако тоа е предвидено во Наставната програма за III одделение.

Во учебникот за IV одделение дропките се разработуваат од 144. до 153. страница, а во Работната тетратка од 100. до 104. страница. И двете книги се објавени во 2006 година.

Во учебникот се опфатени следните содржини поврзани со дропки:

- Основно познавање на дропки, стр. 144. и 145.
- Дропки што означуваат ист дел од целина, стр. 146. и 147.
- Како се формираат еднакви дропки, стр. 148.
- Дропки помали и поголеми од 1, стр. 149.
- Определување на дел од број, стр. 150. и 151.
- Споредување дропки, стр. 152.
- Разни проблеми поврзани со дропки, стр. 153.

Додека во Работната тетратка, дропките се обработуваат во овие наставни единици:

- Основно познавање на дропки, стр. 100.
- Дропки што покажуваат ист дел од целина, стр. 101.
- Споредување дропки, стр. 102.
- Определување на дел од број, стр. 103. и 104.

Во учебниците за четврто одделение гледаме подобро вклучување и третирање на исходите од учењето на дропките предвидени со Наставната програма по математика за четврто одделение.

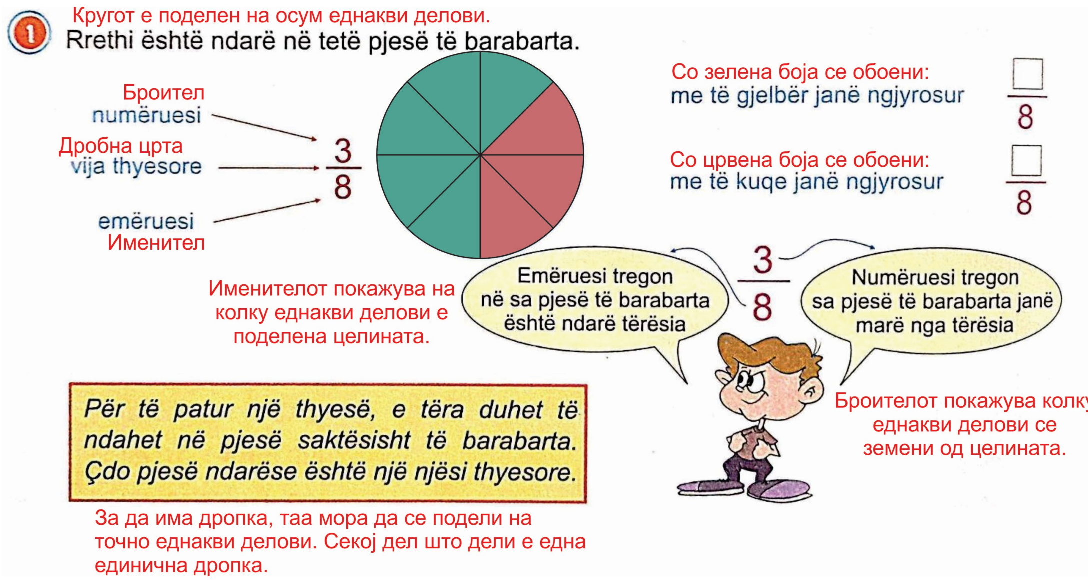
Во овие два учебници наоѓаме пологичен редослед на наставните единици поврзани со споредба на дропките бидејќи најпрвин се внимавало на разбирањето на еднаквите дропки и начините на нивното добивање, а потоа се продолжило со изградбата на разбирањето за споредба на дропките.

Сепак, дури и овде имаме идентификувано многу недостатоци и пропусти, како што се:

- И во текстовите од IV одделение, како и во оние од III одделение, воопшто не се третирани операциите собирање и одземање дропки со ист именител, иако се предвидени во Наставната програма од III и IV одделение;
- Овие учебници не опфаќаат содржини поврзани со определување на дропки со која се комплетира целина;

- Во овие текстови воопшто не се третирани содржините поврзани со децималните броеви и нивната врска со дропките, иако се предвидени со Наставната програма по математика за IV одделение.

Од друга страна, во овие текстови се среќаваме со содржини за дропки поголеми од 1 (неправилни дропки и мешани броеви) кои не се опфатени со Наставната програма за IV одделение.



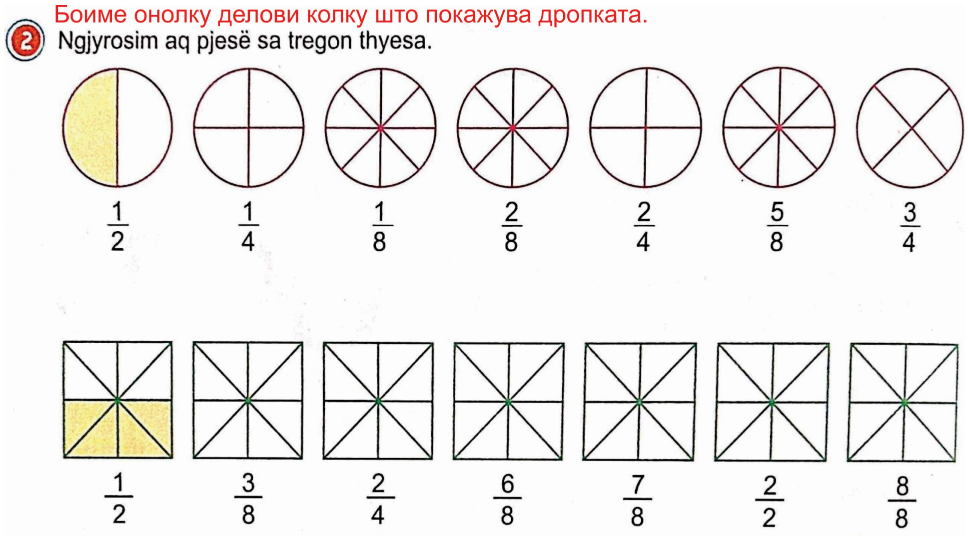
Слика 29: Илустрација на значењето на дропката и значењето на нејзините елементи (именители и броители)

Во првиот пример од првата наставна единица „Почетно знаење за дропките“ (учебник, стр. 144.) сметаме дека илустрацијата (Слика 29) треба да биде придружена со некои сугестивни прашања, како што се:

- Како е поделена сликата?
- На колку еднакви делови е поделена фигурата?
- Од овие делови, колку се обоени зелени, а колку се црвени?

Потоа би можеле да направиме барања за учениците да размислуваат за начините на означување на деловите обоени со зелено или со црвено, но и слични прашања каде што при обидите да се одговори на нив, ученикот самиот почнува да ја создава идејата (сликата) на концептот на дропка и на нејзините елементи.

Исто така, на овие текстови им недостасува внимателност во изборот на соодветни репрезентативни модели за дропки. Од првата страница на овој учебник, од каде што започнува обработката на дропките (стр. 144.), се среќаваме со пример и со илустрација кои веднаш го збунуваат ученикот бидејќи од него се бара да обои ½ од сликата што веќе е поделена на осум еднакви делови (Слика 29). Ова би имало смисла ако зборуваме за дропки кои покажуваат ист дел од целина (еквивалентни дропки), кои се опфатени подоцна во овој учебник.



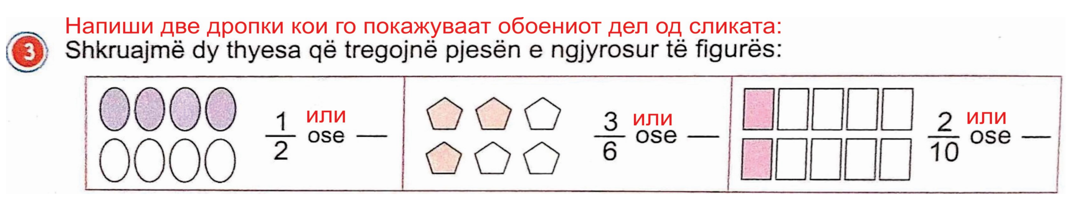
Слика 30: Несоодветно репрезентативни модели на дропки (Математика 4, стр. 144.)

За да се зајакне разбирањето на поимот „дропка“ и на нејзините елементи, наставната единица треба да има уште неколку примери со илустрации и слики од различни контексти. Истите забелешки и пропусти ги има и во Работната тетратка.

Во целина, за примерите од оваа наставна единица тешко може да се каже дека ги исполнуваат дидактичко-методските услови за појаснување на поимот „дропка“ бидејќи дизајнот на оваа наставна единица не е доволно ориентиран кон појаснување на значењето на концептот на дропката и на нејзините елементи (именителот и броителот).

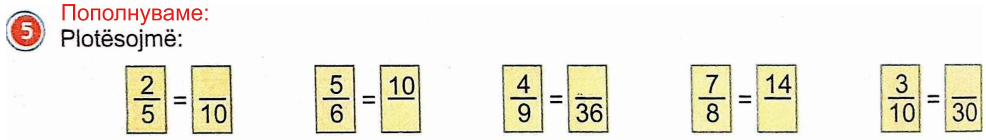
Во втората наставна единица „Дропки што покажуваат ист дел од целина“, за првиот пример заедно со сликата може да кажеме дека не е целосно илустративен. Во почетниот дел требаше да има повеќе примери придружени со илустрации на различни форми и контексти за учениците постепено да ја создадат идејата (сликата) за еднакви дропки.

Во примерот 3 (учебник, стр. 146.), фигурите претставени таму не соодветствуваат со означените барања за текстот погоре бидејќи тие не претставуваат една фигура, туку групи на предмети со иста форма и големина (слика подолу).



Слика 31: Овие претстави не покажуваат една фигура, тука множества на фигури со иста форма и големина

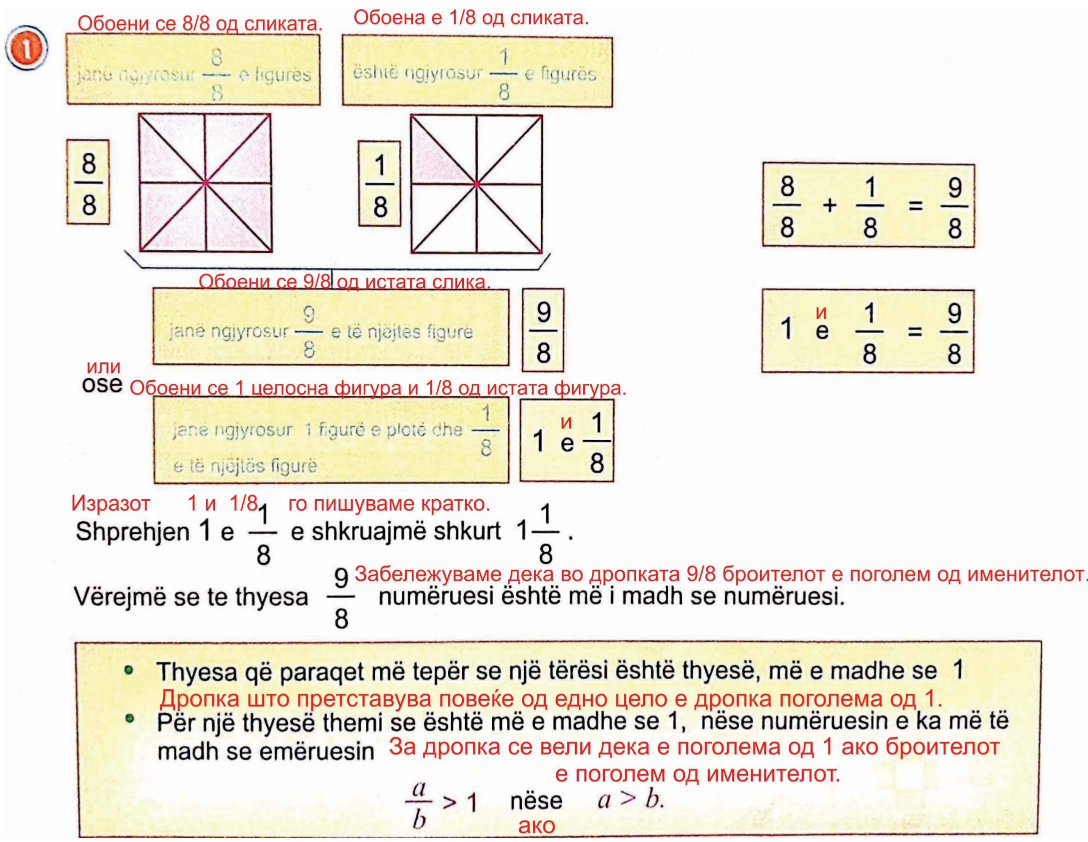
Исто така, сметаме дека учениците ќе имаат многу тешкотии да ги исполнат барањата од примерот 5 бидејќи сѐ уште немаат слушнато лекција како да добијат еднакви дропки (проширување и поедноставување на дропките), кои се изложени по неколку часови во продолжение (учебник, стр. 148.).



Слика 32: Барање да се означи соодветниот броител или именител за да имаме еднакви дропки

На страница 149. од учебникот ја имаме наставната единица „Дропки помали и поголеми од 1“. Од почетокот забележуваме дека воопшто не се зборува за дропки помали од 1 (правилни дропки), туку само за дропки поголеми од 1. Најголем недостаток е што оваа наставна единица воопшто не е обезбедена со Наставната програма по математика за IV одделение.

За ова, да ја погледнеме страницата на која е покриена оваа наставна единица, поточно првиот пример.



Слика 33: Илустрација преку која се прави обид да се визуализира дропката поголема од 1

Од анализата на овој пример забележуваме дека изразот „$\frac{9}{8}$ делови од иста слика се обоени“ збунува и предизвикува сериозна нејасност кај ученикот бидејќи менталните и когнитивните способности на ученикот на оваа возраст не му дозволуваат да разбере како е можно фигурата да се подели на 8 еднакви делови и 9 од нив да се обоени. Овде вреди да се спомене фактот дека токму поради оваа неспособност на учениците од основното ниво да ги разберат дропките што покажуваат големина поголема од 1, во

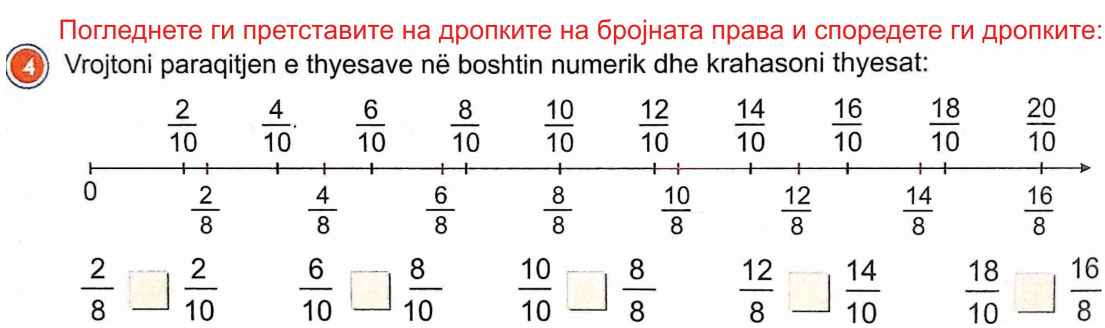
Хрватска дропките се предаваат од V и VI одделение (Brdar B., Hunjek M., Lepen N., 2014).

Исто така, проблем сам по себе е ознаката $\frac{8}{8}+\frac{1}{8}=\frac{9}{8}$ која претставува собирање на дропки со ист именител, а како што рековме погоре, во учебниците по Математика за IV одделение, собирањето и одземањето дропки со ист именител воопшто не се третираат. Овој факт сведочи за неодговорноста и за бесчувствителноста на авторите на овие книги во однос на образовните институции, а особено на учениците на кои им се посветени овие учебници.

Во наставната единица „Споредба на дропки“ (учебник, страница 152.) примерот 1 е добро илустриран за споредување дропки со ист броител и именител. И овде авторите сметаат дека е доволно да се даде само еден пример за кој мислиме дека е малку за учениците да изведат и да ги формализираат правилата за споредување дропки со ист броител или со ист именител.

Слика 34: Илустрација на споредување дропки со ист броител и со ист именител

Во примерот 4 од истата наставна единица, авторите сакајќи да ја разјаснат споредбата на дропките преку бројна права, направиле некои недопустливи пропусти, како на пример, бројната оска не е поделена на толку еднакви делови колку што покажуваат соодветните дропки, дропки со различни именители исто така се поставени на иста бројна права, како и „видливи дропки“ ($\frac{a}{b}$ - е видлива дропка ако а се подели со b).



Слика 35: Несоодветна илустрација за споредување дропки на бројна права

Во основниот текст од V одделение дропките се разработуваат од 149. до 168. страница, а во Работната тетратка од 90. до 99. страница. И двата текста се објавени во 2007 година.

Во учебникот се опфатени следните содржини поврзани со дропки:

- Основно познавање на дропки, стр. 149.
- Еднакви дропки, стр. 150.
- Дропки поголеми и помали од 1, стр. 151. и 152.
- Определување на дел од целина, стр. 153. и 154.
- Проширување и поедноставување на дропки, стр. 156. и 157.
- Собирање дропки со ист именител, стр. 158. и 159.
- Одземање дропки со ист именител, стр. 160. и 161.
- Претворање на дропки во дропки со ист именител, стр. 162. и 163.
- Споредување дропки, стр. 164. и 165.
- Собирање дропки со различни именители, стр. 166.
- Одземање дропки со различни именители, стр. 167.
- Разни задачи со собирање и одземање дропки, стр. 168.

Додека во Работната тетратка дропките се третираат во рамките на овие содржини:

- Основно познавање на дропки, стр. 90.
- Еднакви дропки, стр. 91.
- Определување дел и целина на количество, стр. 92.
- Разни задачи поврзани со дропки, стр. 93.
- Проширување и поедноставување дропки, стр. 94.
- Собирање и одземање дропки со ист именител, стр. 95.
- Претворање на дропки во дропки со ист именител, стр. 96.
- Споредување дропки, стр. 97.
- Собирање и одземање дропки со различни именители, стр. 98.
- Разни задачи поврзани со собирање и одземање дропки, стр. 99.

Ако се анализира само тематската поставеност на содржините на дропките во овие два учебници, може да се забележи невнимание и многу несоодветен и нелогичен третман во распоредот и во меѓусебното поврзување на овие содржини.

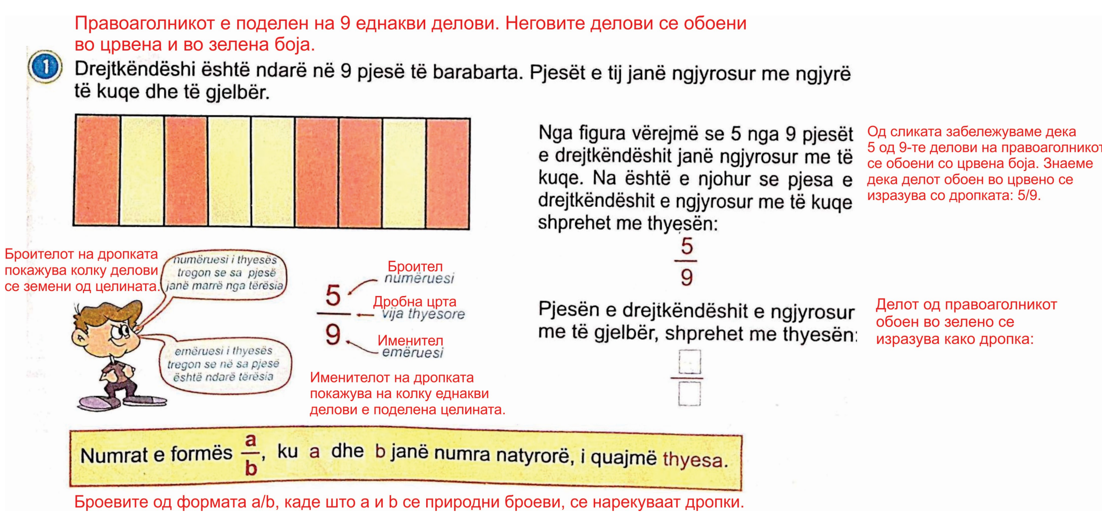
На пример, веднаш откако ќе се зборува за „Основи на дропките“, се преминува на содржината „Еднакви дропки“ (главна книга, страница 150.) што ѝ припаѓа на областа „Споредување дропки“, потоа се преминува на содржината „Поголеми и помали дропки од 1“ (насловот е формулиран нелогично и без значење, стр. 151., 152.), потоа се зборува за дефинирање на дел од целина (стр. 153., 154.), а веднаш потоа зборуваме за операциите на проширување и на поедноставување дропки (стр. 156., 157.) како две операции преку кои добиваме еднакви дропки, кои се третирани во книгата од самиот почеток (стр. 150.).

Овој нелогичен редослед продолжува уште понатаму кога се продолжува со содржината „Собирање дропки со ист именител“ (стр. 158. и 159.), потоа „Одземање дропки со ист именител“ (стр. 160. и 161.), па продолжува со содржините „Претворање дропки во дропки со ист именител“ (стр. 162. и 163.), а на самиот крај, без никаква логика, на учениците им се нуди наставната единица „Споредба на дропки“ (стр. 164. и 165.).

Истата логика се користи и при организирање на содржините за дропки во Работната тетратка по математика за V одделение.

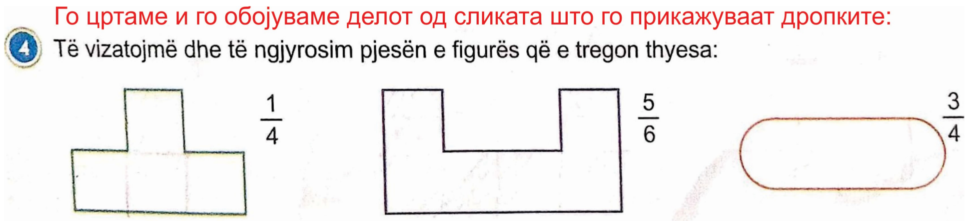
Ако ги анализираме содржините на наставните единици, начинот на кој се избираат и се поставуваат задачите, како и нивната визуализација, забележуваме низа пропусти, како на пример:

Од самиот почеток, во првиот пример, наидуваме на дидактичка грешка која лесно го збунува ученикот бидејќи таму дропката е дефинирана како „број“ од формата a/b. Тоа не може да се случи со петтоодделенците бидејќи тие сè уште не учат за рационалните броеви, па дропката мора да се дефинира како „забелешка“ од формата a/b.



Слика 36: Несоодветно дидактичко дефинирање на дропката за учениците од V одделение (стр. 149)

Примерите 2 и 3 се идентични од текстот од трето одделение (Слика 3), со истите пропусти. Примерот 4, исто така, е доста збунувачки бидејќи фигурите се премногу сложени за да ги претставаат (разликуваат) нивните делови што ги прикажуваат дадените дропки, бидејќи когнитивните вештини на ученикот од петто одделение не му дозволуваат да ги поделат овие прилично сложени фигури на еднакви делови и потоа да обојат онолку делови колку што бараат соодветните дропки.



Слика 37: Фигурите не се соодветни за илустрација на дропки за ученици од петто одделение (стр. 149)

Иако учењето мешани броеви и неправилни дропки не е вклучено во Наставната програма по математика за петто одделение, сепак, учебниците за петто одделение ги третираат на многу невешт начин и покрај тоа што се многу сложени содржини за учениците од петто одделение. Воопшто нема објаснување што претставуваат, ниту како се добиваат, туку веднаш се даваат задачи во кои се бара да ги соберат и да ги одземат (учебник стр. 152. и Работна тетратка стр. 98.).

Значи, главно, од анализата на содржините за дропки во горерazгледаните учебници се констатира дека тие имаат низа пропусти, и дидактички и методолошки, кои во голема мера го отежнуваат процесот на предавање и учење на дропките. Во врска со овие недостатоци и нивното санирање, ќе дадеме неколку препораки во соодветниот дел од овој труд.

Во многу наставни единици во учебниците за трето, четврто и петто одделение, посветени на дропки, забележавме повторување од типот „copy paste“ на примери, илустрации, а понекогаш дури и на целата содржина на учебниците од различни одделенија.

Од анализата на програмите, и особено на учебниците што ги презентиравме погоре, констатираме дека дропките се третираат на најнесоодветен начин.

Исто така, дел од нашето истражување посветивме на анализа на трендовите во учењето на дропките низ светот, каде што видовме многу напредни пристапи во некои земји со напредни образовни системи.

3.2. Анализа на писмените подготовки за наставните единици за наставниците и на работните листови за учениците според теоријата Пирие-Киерен

3.2.1. Предвидување на улогата на наставникот во реализацијата на наставните единици во експерименталните одделенија

Во процесот на создавање на писмените подготовки за наставниците и на работните листови за учениците, беше предизвик да се предвиди улогата на наставникот во целиот процес на создавање, развивање и проширување на разбирањето на дропките во експерименталните одделенија. Во овој поглед, консултиравме некои истражувања и практични модели на примена на Теоријата Пирие-Киерен.

Едно од нив е истражувањето “Teacher Interventions for Advancing Students Mathematical Understanding” од авторите Ксијангјуан Јао и Азита Маночери (Xiangquan Yao & Azita Manouchehri) (2020), на кое се повикуваме подолу.

Ова истражување се обидува на практичен начин да ги демонстрира улогата и важноста на социјалната интеракција во функција на зголемување на математичкото разбирање кај учениците, особено интеракцијата наставник – ученик. Инаку, авторите на ова истражување оваа интеракција ја нудат повеќе преку терминот „интервенција“, намерно нагласувајќи ја неопходноста од интервенција на наставникот во клучни моменти од процесот на градење и развивање на математичкото разбирање на ученикот. И покрај фактот дека Теоријата Пирие-Киерен е конструктивистичка теорија, авторите на Теоријата Пирие-Киерен (1994) споменуваат три типа интервенции на наставникот:

- **Провокативни дејства** на наставникот, кои влијаат на поместување на разбирањето на ученикот на надворешниот слој (ниво) на разбирање.

- **Стимулирачки дејства** на наставникот, кои го поттикнуваат ученикот да се врати на внатрешното ниво на разбирање со цел да го прошири или да го промени своето разбирање, и

- **Потврдни дејства** на наставникот, кои му овозможуваат на ученикот да го потврди моменталното разбирање.

Иако овие три типа интервенции на наставниците не беа дополнително истражени во оригиналниот модел, може да сметаме дека Теоријата Пирие-Киерен обезбедува конзистентна рамка за испитување на движењата на наставниците кои го поддржуваат растот на учениците во математичкото разбирање (Yao & Manouchehri, 2020).

Од анализата на наодите од претходно споменатото истражување произлегува дека постојат девет категории на интервенции на наставниците. Секоја категорија опишува тип на интервенција што се чини дека поттикнува конструкција, префинетост или потврдување на математичката идеја кај учениците.

I. Активирање на примитивното знаење

Активирањето на примитивното знаење вклучува активности на наставникот кои го поттикнуваат ученикот да бара и да собира употребливо и неопходно знаење за да премине на надворешните нивоа на разбирање. Наставникот може да користи различни дејства за да го извлече претходното знаење на ученикот, потпирајќи се на техники за извлекување или за разговор. Тој го насочува ученикот кон специфични знаења кои наставникот ги смета за корисни за продлабочување на разбирањето на ученикот.

II. Подобрување на примитивното знаење

Подобрувањето на примитивното знаење се однесува на случаи во кои наставникот идентификува и презема активности за да го подобри нецелосното или несоодветното разбирање на математичкиот концепт од страна на ученикот на ниво на основно знаење. Кога конструира разбирање за определен математички концепт, ученикот ги носи своите претходни знаења и искуства во процесот, од кои некои можеби не се корисни за унапредување на неговото разбирање поради нецелосни ментални слики, нецелосни дефиниции итн. За да го продлабочи разбирањето на математичкиот концепт, наставникот презема активности за да се решат празнините во претходното знаење на ученикот (на пример, со поставување прашања за да се освести ученикот за празнините или за недостатоците во неговото претходно знаење, со воведување прецизни математички дефиниции и сл. Подобрувањето на примитивното знаење е дејство што го поттикнува ученикот да се врати од сегашното ниво на разбирање на примитивното знаење.

III. Поттикнување на прегледување на сликите

Поттикнувањето на прегледување на сликите се состои од интервенции на наставникот кои ги вклучуваат учениците во прегледување и мислење за нивните тековни математички активности. Развивањето на математичкото разбирање често вклучува извршување на специфични активности за да се формира почетен концепт, да се разбере математички концепт или да се има прелиминарна идеја за решавање на определен математички проблем. Меѓутоа, ученикот кој едноставно се впушта во математички задачи и проблеми може да ги види своите претходни дејства како целосни и, според тоа, не може автоматски да погледне наназад и да не размислува за својата тековна работа. Надворешните интервенции може да бидат неопходни за да се вклучи ученикот во прегледување и размислување за дејствата преземени во математичките задачи и проблеми и за производот што произлегува од тие дејства.

Со разгледување и размислување за својата тековна работа, ученикот може да го приспособи своето однесување и да создаде прелиминарна идеја како да го реши проблемот за кој станува збор. Овој тип интервенција на наставникот му овозможува на ученикот да ги промени своите постапки без сè уште да има јасен ментален план за решавање на проблемот.

IV. Интернализација на менталните слики

Наставникот може да му помогне на ученикот во интернализирањето на менталните слики преку определени дејства. Иако менталната слика е внатрешно претставување на математичката идеја, таа може да се моделира со надворешно претставување. Надворешната ментална слика може да стане предмет на подоцнежни дискусии. Ова може да го поттикне ученикот да ја усоврши својата ментална слика, да набљудува нови својства на менталната слика, да формализира (дефинира) идеја изведена од менталната слика или да ја оправда валидноста на идејата. Ова му овозможува на ученикот да преземе акција за надворешната ментална слика и да ги забележи нејзините својства.

V. Фокусирање на вниманието кон математичките својства/односи

Фокусирањето на вниманието кон математичките својства/односи се однесува на интервенциите на наставникот за да се насочи вниманието на ученикот кон специфичните математички карактеристики на проблемот, идејата или претставата. Истражувачите Боале и Броди (Boaler & Brodie, 2004) го карактеризираат овој тип на интервенција како „ориентација и фокус“ или како важен тип стратегија на наставникот кој преку прашања го насочува вниманието на ученикот кон главните аспекти на проблемската ситуација.

VI. Поттикнување на проширување на математичките идеи

Поттикнувањето на проширувањето на математичките идеи вклучува моменти во кои наставникот го поттикнува ученикот да ја прошири математичката идеја надвор од проблемот, ситуацијата или случајот во кој таа започнала. Кога поттикнува проширување на математичките идеи, наставникот може да се стреми ученикот да го прошири опсегот на идејата, да ги синтетизира претходно истражените математички идеи, да открие нова математичка врска и/или да ја подведе идејата во поопшта идеја. Како резултат на тоа, ученикот создава нешто ново, нова врска или нова структура. Оваа интервенција на наставникот може да го поттикне ученикот да истакне карактеристики или да формализира идеја која може да се примени за да се реши нов проблем. Исто така, наставникот може да ги поттикне учениците да се вратат на внатрешното ниво на разбирање, како што е „Поседување слика“ или „Создавање слика“, кога идејата е недоволна за да се реши новиот проблем. Интервенциите на наставникот може да го прошират опсегот на валидноста на идејата.

VII. Поттикнување на формализирање на математичките идеи

Поттикнувањето на формализирање на математичките идеи се однесува на интервенциите на наставникот за да се поттикне ученикот формално да изрази математичка идеја што ја применил за да реши проблем, но сè уште не е експлицитно артикулирана на формален јазик. Истражувањата покажуваат дека понекогаш ученикот формално не може да артикулира математичка идеја без надворешно поттикнување. Затоа, интервенцијата на наставникот е од суштинско значење за да му помогне на ученикот да ја формализира својата математичка идеја. Како проактивна акција, поттикнувањето на формализирање на математичките идеи има за цел да го придвижи разбирањето на ученикот кон формализирање.

VIII. Синтетизирање математички идеи

Синтетизирањето математички идеи вклучува случаи во кои наставникот директно ја формализира математичката идеја што ученикот ја конструирал, но сè уште не е формално артикулирана. Математичките идеи може да се изразат во неформални, претформални и формални претстави. Кога ги синтетизира математичките идеи, наставникот презема активна улога и користи формален математички јазик за да ги опише математичките идеи што ги изразиле учениците. Овој тип интервенција на наставникот се разликува од поттикнувањето на формализирање на математичките идеи со тоа што наставникот, а не ученикот е тој што ја дава формалната изјава. Како проактивна акција, синтетизирањето математички идеи често има за цел да ги придвижи учениците од внатрешен слој на разбирање до формализирање.

IX. Поттикнување на идеи за математичко расудување

Стимулирачките идеи за математичко расудување претставуваат дејства на наставникот кои го ангажираат ученикот да ја објасни валидноста на математичката идеја, потпирајќи се на својствата на математичката задача или проблем што се разгледува, или преку создавање аргумент што се состои од неколку поврзани искази. Овој тип на интервенција на наставникот може да има различни форми: барање од ученикот да објасни генерализација, ангажирање на ученикот во поврзувањето на генерализацијата со познати математички својства или ангажирање на ученикот во градење на синџир на логично расудување. Нивото на поддршка што ја дава наставникот, исто така, варира од случај до случај. Иако оваа интервенција не се случува во сите фази, главно, таа има за цел да го доведе ученикот на ниво на „структурирање“ (Yao & Manouchehri, 2020).

Во процесот на изработка на писмените подготовки за наставникот и на работните листови за ученикот, се обидовме да ги земеме предвид сите овие препораки со цел да создадеме најефективни можности наставникот да интервенира во определени моменти. Тоа го направивме многу внимателно, почитувајќи ја теоретската основа на Теоријата Пирие-Киерен како конструктивистичка теорија, која ја нагласува главната улога на ученикот во изградбата, развојот и проширувањето на математичкото разбирање.

За ова, најпрвин ја создадовме општата рамка на писмени подготовки за наставникот и работните листови за ученикот, кои ќе ги презентираме подолу.

3.2.2. Општа рамка за дизајнирање наставен час по Математика

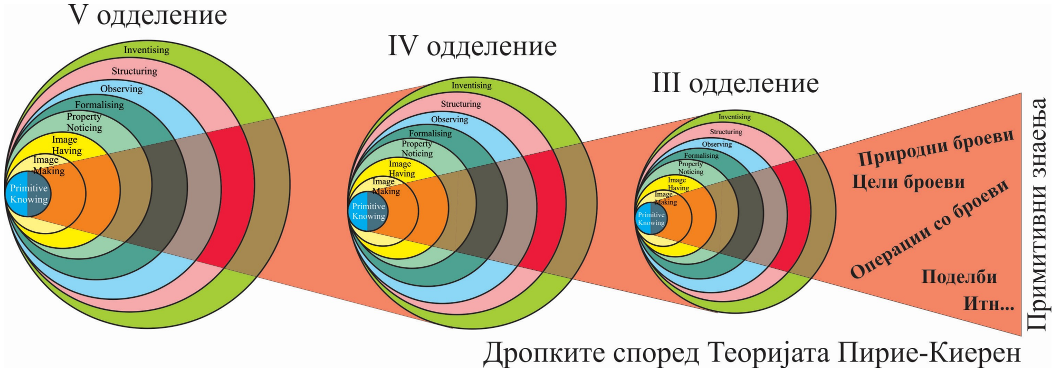
Прва задача на наставникот е да разбере што знае ученикот, да ги согледа работите од гледна точка на ученикот и да го разбере неговиот начин на размислување. Во процесот на формирање математички поими, наставникот треба да му помогне на детето да разбере така што ќе му дозволи практично да ги истражува материјалите барајќи различни начини за презентирање практични активности (Makaševska, 2015).

Пред да започнеме со дизајнирање наставен час за експерименталните паралелки според Теоријата Пирие-Киерен, прво ја направивме рамката за ориентација врз која ќе го засноваме нашиот дизајн.

Ова го направивме откако:

- ги анализиравме програмите и учебниците по математика во Косово во однос на дропките;
- анализиравме модели, програми, стратегии и учебници од многу земји со добри традиции во учењето математика, особено во однос на дропките;
- ги анализиравме и ги обработивме препораките на експертите за учење дропки;
- детално ги анализиравме Теоријата Пирие-Киерен, моделите и примерите на нејзина примена.

Секако, референтна точка беа резултатите од учењето од Наставната програма по математика посветена на дропките во Косово, кои ги реорганизиравме според логичка хиерархија, правејќи ги поусогласени и меѓусебно во функција во рамките на наставните единици од едно одделение, како и меѓу единиците и содржините од други одделенија. Направивме реорганизација на рангирањето на резултатите од учењето користејќи ја Теоријата Пирие-Киерен бидејќи таа може да се користи како еден вид модел за оценување и за дизајнирање образовни програми и учебници.



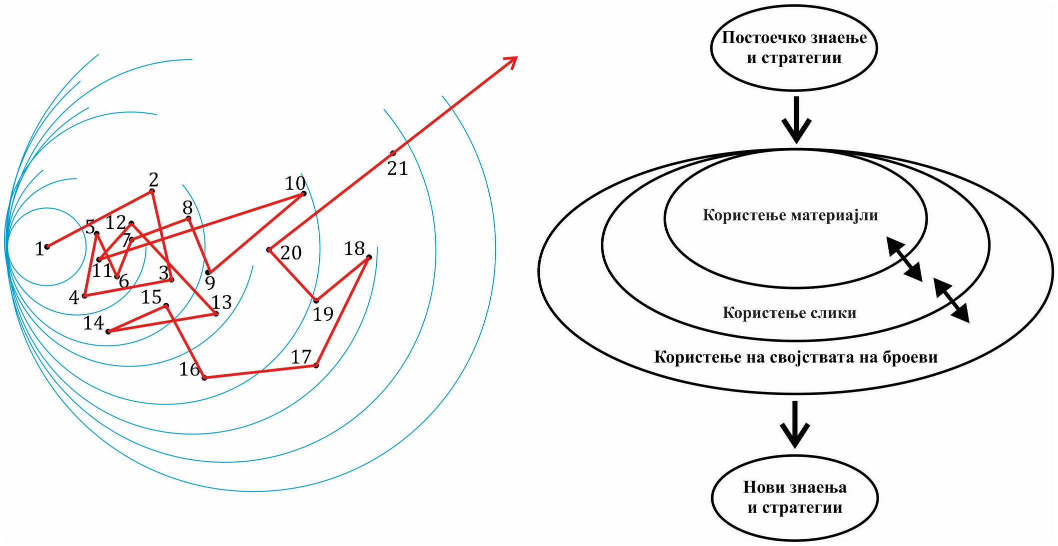
Слика 38: Примена на Теоријата Пирие-Киерен во изградбата и во проширувањето на знаењата за дропките во III, IV и V одделение

Бидејќи Теоријата Пирие-Киерен се занимава со развојот и со проширувањето на општото математичко разбирање, прво го контекстуализиравме во рамките на разбирањето на дропките.

Поради неможноста да се вклучат сите резултати од учењето на дропките за секое одделение (III, IV и V) предвидени со Наставната програма по математика, избравме листа на најсуштинските исходи кон кои ги насочивме писмените подготовки за наставниците и работните листови за учениците од експерименталните одделенија со оглед на тоа дека истиот материјал ќе се обработува и во неексперименталните паралелки.

Ги категоризиравме задачите и барањата подготвени во работните листови за учениците на различни нивоа користејќи шеми, модели и различни пристапи, како што се Блумовата таксономија, SOLO-таксономија, различни водичи за подучување и учење на дропките подготвени од владини и од невладини институции, како што се оние од NCTM (National Council of Teacher of Mathematics), RNP (Rational Number Project), UNESCO, OECD кој го организира и го спроведува тестот PISA итн.

Како што споменавме, Теоријата Пирие-Киерен е рекурзивна теорија за математичкото разбирање според која растот на математичкото разбирање е динамичен процес, израмнет, но нелинеарен, а изградбата на новото знаење се врши врз претходното знаење што го поседува ученикот и го носи во однос на наставните содржини во третманот кои според Теоријата Пирие-Киерен се вбројуваат како формално ниво на примитивно знаење. Затоа, најпрво требаше да ги истражиме сите оние претходни знаења што ученикот може да ги поседува и да ги внесе во контекст на прашањата што ги поставува содржината што се обработува. Тие може да бидат знаења од претходни целини, но и претходни знаења и искуства, а со тоа сите се ставаат во функција на градење нови знаења, логично и хармонично поврзани меѓу нив.



Слика 39: Илустрација на процесот на изготвување писмени подготовки за наставни единици за наставникот и работни листови за ученикот

Организиравме писмени подготовки за наставниците и работни листови за учениците според вообичаената шема: евоцирање, реализирање и размислување (ERR).

Низ секоја фаза од развојот на наставната единица, ученикот за време на работата и на активностите во обид да ги исполни барањата изготвени во работните листови, покажува различни нивоа на математичко разбирање според Теоријата Пирие-Киерен. Ученикот, соодветно на неговото разбирање, се движи напред-назад низ различни знаења, слики, значења и поими за да го исполни своето разбирање, поточно во насока на исполнување на исходите од учењето за дадената наставна единица.

Наставниците кои работеа со експерименталните одделенија ги охрабривме и им наложивме да користат што повеќе манипулативи од различен тип за да го олеснат процесот на настава и учење на дропките. За таа цел, подготвивме листа на онлајн софтвери, некои од нив ги преземедовме и однапред им ги дадовме да ги користат на часовите со цел да ги олесниме разбирањето на дропките и различните аспекти и операции што имаат врска со дропките. Сето ова ги поттикна учениците да создаваат шеми, мапи и ментални слики за дропките.

На почетокот на секоја писмена подготовка за наставникот и на работните листови за ученикот сакавме да го зајакнеме фактот дека се разгледуваат само случаите кога имаме поделба на големината на еднакви делови. Ова го направивме со дизајнирање примери опремени со илустрации од различни форми и контексти. Ова е многу важно бидејќи му помага на ученикот при стекнување други содржини поврзани со дропки, како што се: пресметување на дел од целина или од број, споредување дропки, извршување аритметички операции со дропки итн.

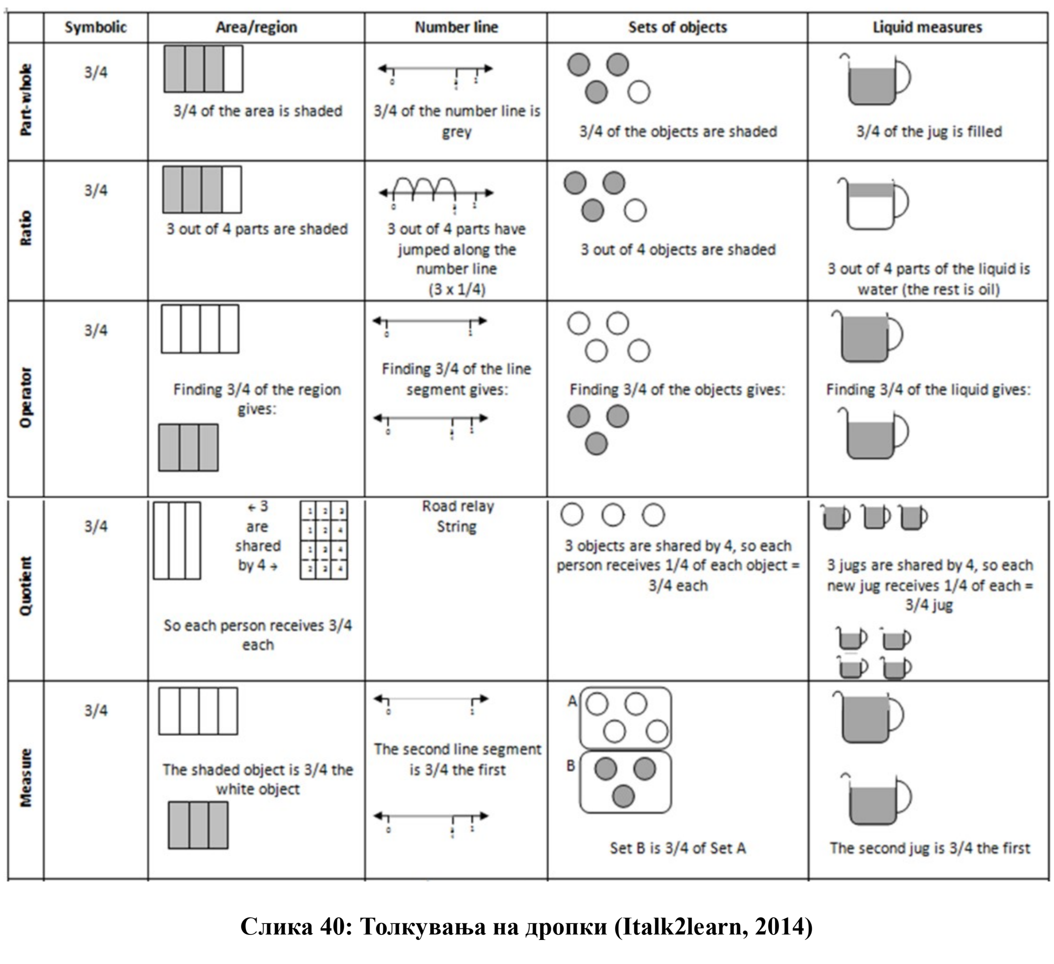
Главниот дел (реализација) на наставниот час според Теоријата Пирие-Киерен е изграден по логичен редослед, поврзувајќи го со почетниот дел (евокација). Примерите и барањата се илустрирани со различни графички прикази, ситуации и различни контексти.

Преку сугестивни прашања од различни нивоа, учениците се поттикнуваат да го формализираат знаењето што го создале во различни форми. И така ученикот, со други зборови, своето разбирање за дропките го развива и го проширува прогресивно, со исполнување на формални нивоа на разбирање за дропките.

Теоријата Пирие-Киерен може да се користи и за да се процени нивото на математичко разбирање, а тоа може да го направиме преку инструменти за оценување на крајот од секоја лекција. Значи, според оваа теорија го направивме и завршниот дел од наставните единици (рефлексија).

Конечно, се погриживме писмените подготовки за наставникот и работните листови за ученикот да бидат направени така што учениците кои наишле на тешкотии или се заглавени во разбирањето на определени содржини да може да ги согледаат, а во исто време да може да ги отстранат и/или да ги исправат конкретните пропусти.

Посебно значење му дадовме на толкувањето на дропките кои може да се толкуваат како дел од целина, однос, оператор, количник и како количина (мерка). Исто така, нивното прикажување може да се врши преку фигури – површини, нумерички линии, купови – предмети, разни табели и сл.



Слика 40: Толкувања на дропки (Italk2learn, 2014)

3.2.3. Анализа на наставен час по Математика во експериментално одделение

Имајќи ги предвид пропустите и недостатоците на наставните програми и на учебниците што беа предмет на анализа во соодветното поглавје, секогаш сме го подготвувале наставниот час за експерименталната настава во согласност со Теоријата Пирие-Киерен, како и со препораките на експертите и на релевантните институции. Тие ги вклучуваат исходите од учењето предвидени во Наставната програма по математика за III, IV и V одделение.

За реализација на нашето истражување, подготвивме писмени подготовки за наставникот и работни листови за ученикот од експерименталните одделенија, и тоа:

За III одделение ги подготвивме наставните материјали за четири наставни часа:

- Разбирање на дропките.
- Дропките како дел од целината.
- Дропки што покажуваат ист дел од целината.
- Споредување дропки со ист броител и именител.

За IV одделение подготвивме материјали за учење за пет наставни часа:

- Дропки и нивното значење.
- Дропки помали од 1 и еднакви на 1.
- Дропките како дел од број.
- Споредба на дропки.
- Собирање и одземање дропки со ист именител.

За V одделение подготвивме наставни материјали за 4 наставни часа:

- Дропки и нивното значење.
- Споредба на дропки.
- Собирање и одземање дропки со ист именител.
- Собирање и одземање дропки со различни именители.

Во однос на реализацијата на наставните часови во експерименталните одделенија, на почетокот организиравме посебни состаноци со наставниците од одделенијата (III, IV и V одделение) за секој училиштен дел од нашето истражување со цел да се разјасни методологијата на нивното истражување, дизајн и употреба при работата со учениците. Исто така, на овие состаноци го објаснивме значењето на Теоријата Пирие-Киерен, како и целите на нашето истражување.

Во текот на експерименталната работа паралелно работевме со сите ученици од експерименталните одделенија (III, IV и V), во сите училишта и во исто време, а тоа нè натера да не сметаме доволно на „примитивното знаење“, особено кај учениците од IV и од V одделение. Затоа, во писмените подготовки и за наставниците и за учениците повеќе се фокусиравме на создавање елементарни знаења, немајќи доволно храброст да се засноваме врз знаењата за дропките што ги носат од претходните одделенија (III и IV).

3.2.3.1. Анализа на наставни часови во согласност со Теоријата Пирие-Киерен за III одделение

За првиот час подготвивме писмени подготовки за наставниците и работни листови за учениците за наставната единица **„Дропки и нивното значење“**.

За оваа наставна единица ги составивме овие резултати од учењето:

- Означува делови од целини како дропки.
- Претставува со помош на дропки графички прикази на дропките и обратно.

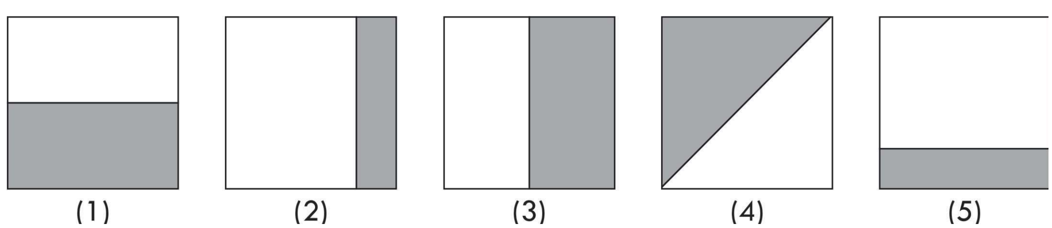
Овие резултати од учењето на оваа наставна единица придонесуваат за постигнување на исходите од учењето за темата „Дропки“, предвидени во Наставната програма по математика дизајнирана од MASHT-a:

- Претставува како дропки, графички приказ на дропки.
- Определува дел од целина.

Од почетокот сакавме да го истакнеме фактот дека кога зборуваме за дропки, секогаш се повикуваме на поделба на целината на еднакви делови.

Како примитивно знаење за оваа наставна единица може да се набројат знаењата за делење броеви, делење на еднакви делови, знаење за природни броеви и дејства со нив, знаење за фигури и различни предмети итн...

За да го истакнеме првичното (примитивно) знаење за дропките, преку фигури и репрезентативни модели бараме од учениците да ги набљудуваат поделбите на фигурите, идентификувајќи ги случаите кога фигурите се делат на еднакви делови, а кога на нееднакви делови.

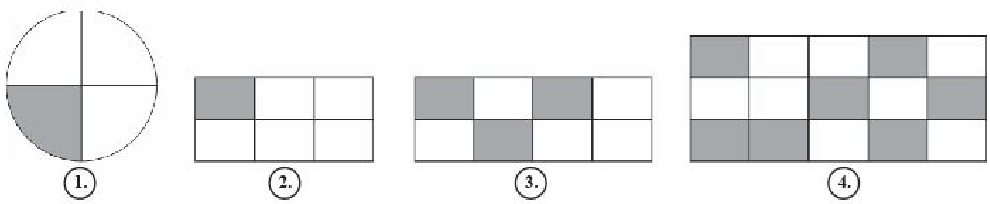


Слика 41: Од ученикот се бара да ги идентификува случаите кога фигурата (квадратот) се дели на еднакви делови

Ученикот развива еден вид самодоверба и почнува да го користи истото знаење во нови задачи и барања, како во примерот 2 во кој од ученикот се бара да ги подели дадените фигури на еднакви делови. Така, ученикот почнува да ја разбира идејата дека се работи за делење целини на еднакви делови и влегува во второто ниво на разбирање според Теоријата Пирие-Киерен „Создавање на сликата“.

Слика 42: Ученикот ги дели фигурите на еднакви делови онака како што се бара

Потоа, во главниот дел од часот, во работните листови за учениците претставивме фигури поделени на еднакви делови, некои од овие делови се обоени. Од она што го виделе и го разбрале во претходните примери, како и преку сугестивни прашања, наша цел е ученикот да размисли за начинот на делење на фигурите, за бројот на обоени и на необоени делови. И така, ученикот забележува дека навистина почнал да разбира и формално сега е на третото ниво на разбирање „Имање слика – сопственост на сликата“.



Како се поделени фигурите?

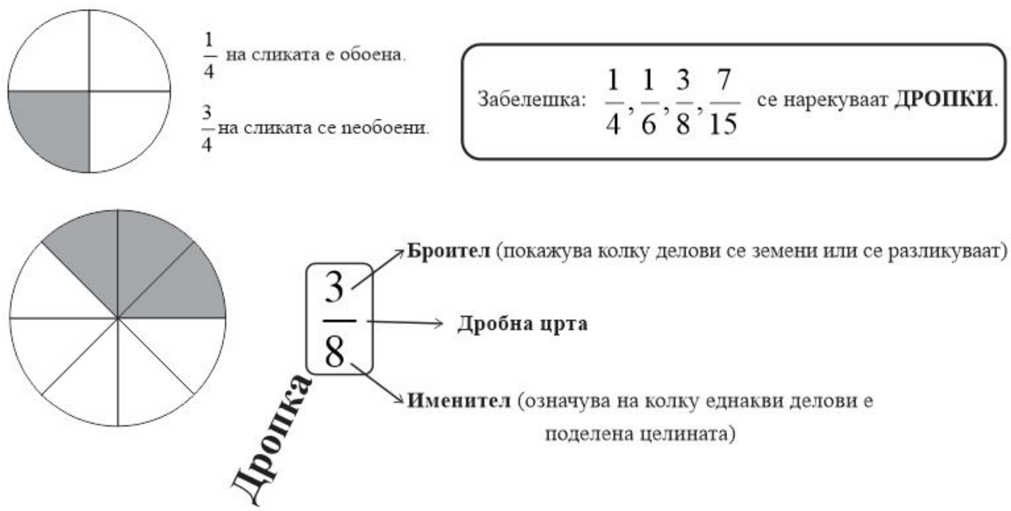
Колку делови се обоени?

Колку делови се необоени?

Фиг...	Вкупно еднакви делови	Обоено	Необоено
1	4	1	3
2			
3			
4			

Слика 43: Со гледање на сликите и со одговарање на сугестивни прашања, ученикот ја комплетира табелата

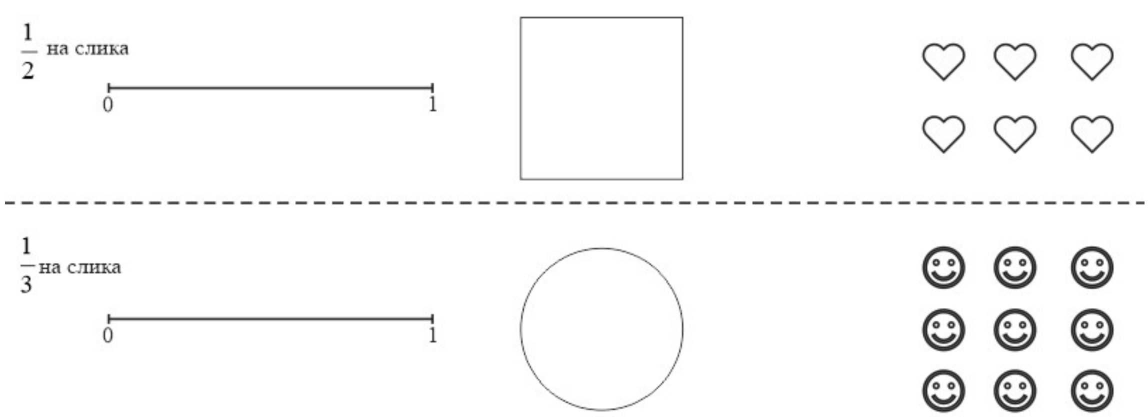
Веднаш потоа, преку специфични прашања и барања, на пример, „Колку делови од фигурите обоивме?“, ученикот мора да воспостави врски и односи меѓу обоените и необоените делови на сите други фигури по ред. Објаснувањето на овие врски и тврдења, како и нивното прикажување со помош на посебни забелешки, како што се: $\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{6},\frac{5}{6},\frac{3}{8},\frac{5}{8}$ го тера ученикот да го почувствува напредокот на своето разбирање со преминување на четвртото ниво на разбирање „Известување за сопственост“.



Слика 44: Изведување на дефиницијата за дропка и за нејзините елементи

Значи, веднаш преку последниот пример и преку претходните примери, ученикот го формализира значењето на дропката и може да го разјасни значењето на нејзините елементи (именители и броители). И така, ученикот го достигнува петтото ниво на разбирање според Теоријата Пирие-Киерен „Формализација“.

Кога ученикот ќе достигне до едно формално ниво на разбирање на концептот на дропка, ние правиме обид да го развиеме неговото разбирање и да го прошириме понатаму на шестото ниво на разбирање „Набљудување“. Тоа ќе го направиме преку пример во кој бараме да разликува делови од фигури и репрезентативни предмети. На ова ниво, ученикот е способен да ги организира, да ги презентира и да ги оправда своите идеи на доследен и логичен начин.



Слика 45: Ученикот дели, разликува и бои делови од фигури и различни целини онолку колку што покажуваат соодветните дропки

За последниот дел од часот подготвивме листови за оценување преку кои сакавме да го провериме исполнувањето на планираните резултати и евентуално да го подобриме разбирањето на ученикот. Значи, со решавање на задачите и барањата на овој лист за оценување, тој покажува дека неговите формални согледувања се точни или неточни. Со расудување и потврдување на своето разбирање, ученикот покажува дека го исполнил седмото ниво на разбирање според Теоријата Пирие-Киерен „Структурирање“.

На последното ниво „Создавање“, ученикот успева да избега од структурираните форми на разбирање што претходно ги конструирал, да поставува нови прашања што може да доведат до процес на конструкција на значењето или до нов и поинаков концепт.

Не се вели дека за секоја содржина за учење разбирањето на ученикот оди од првото до последното ниво. Исто така, не може да имаме ригорозни дефиниции за нивоата на разбирање на определени поими и содржини. Во зависност од содржината, ученикот и другите фактори, наставникот може да го согледа разбирањето на своите ученици наспроти определбите на нивото на општото разбирање според Теоријата Пирие-Киерен.

Со истиот пристап ја подготвивме и втората наставна единица **„Дропките како дел од целината“**.

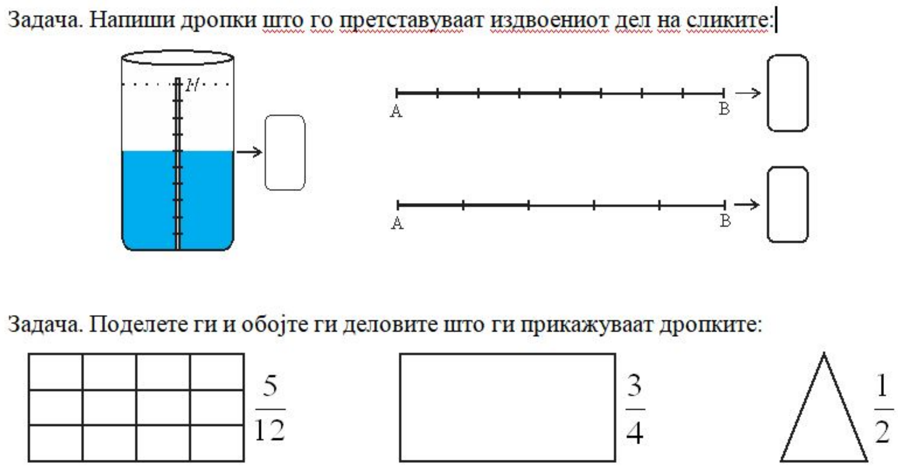
За оваа наставна единица ги составивме следните резултати од учењето:

- Ги претставува со помош на дропки графичките прикази на дропките и обратно.
- Дропките се дел од целина/големина.

Овие резултати придонесуваат за реализација на исходите од учењето за темата „Дропки“, предвидени во Наставната програма за математика за III одделение дизајнирана од MASHT-а:

- Претставува како дропки графички прикази на дропки.
- Определува дел од целина.

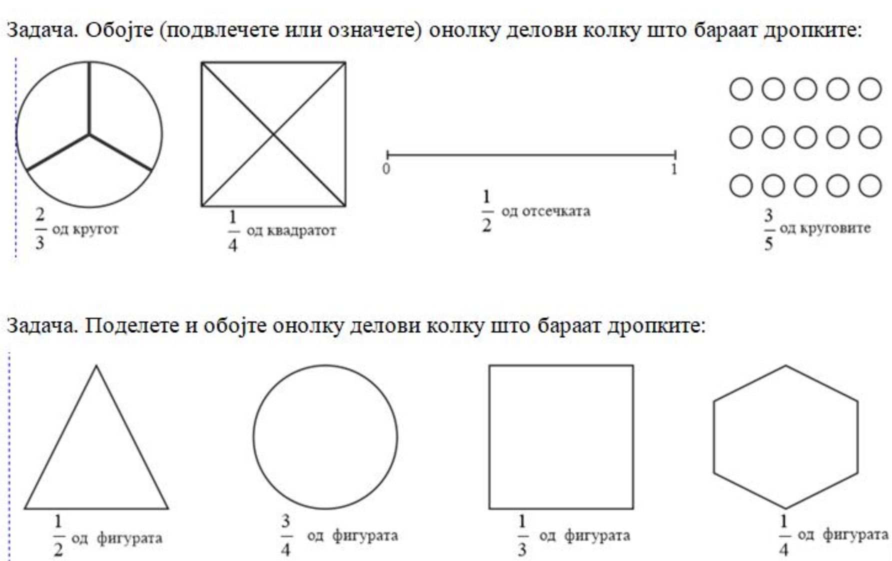
За да го ажурираме претходното знаење за елементарното значење на дропките, во работните листови на ученикот подготвивме неколку задачи и барања (1, 2, 3 и 4). Преку нив сакавме ученикот да може да изрази што претставуваат дропките, да ги именува и да ги опишува елементите на дропката (броител и именител), да идентификува делови од фигурите што ги прикажуваат соодветните дропки, да дели и да разликува еднакви делови од различни фигури (квадрат, круг, триаголник, маса, отсечка итн.).



Слика 46: Ученикот ја пишува дропката што прикажува делови од целината, бои и разликува онолку делови од сликата колку што покажуваат соодветните дропки

На овој начин ученикот ќе создаде идеја и увереност дека го разбира концептот на дропка, умее да ги толкува дропките на различни начини. Значи, ученикот на некој начин создава и поседува слики и ментални шеми за дропки, нагласувајќи ги својствата на дропките и нивните елементи кои, всушност, се самите нивоа на разбирање според Теоријата Пирие-Киерен. Сето ова ќе го искористиме како „примитивно знаење“ за оваа наставна единица, а оттука преку внимателно подготвени примери ќе го доведеме ова знаење на други нивоа на разбирање според Теоријата Пирие-Киерен.

Преку следните примери сакавме да забележиме колку учениците го „формализирале“ во својот ум (петто ниво на разбирање според Теоријата Пирие-Киерен) значењето на елементите на дропките. Така, бараме од учениците да поделат на еднакви делови фигури од различни форми, како и да прикажат и да разликуваат (да обојат) определени делови од нив.



Слика 47: Ученикот дели фигури со различни форми на еднакви делови, покажува и разликува (бои) определени делови од нив

По консолидирањето на формализираните вештини кај ученикот, треба да го доведеме неговото разбирање на следното ниво „Набљудување“, во кое ученикот свесно се обидува да го зголеми разбирањето. За таа цел дизајниравме неколку примери од секојдневниот живот, како што е, на пример, пресметка на делови од различни целини (пари, време, тежина, должина итн...).

Задача. Знаеме дека 1 евро има 100 центи, па колку центи претставуваат:

$\frac{1}{2}$ од 1 евро = ______ центи, $\frac{1}{4}$ од 1 евро = _____ центи,

$\frac{7}{10}$ од 1 евро =_____ центи.

Задача. Знаеме дека неделата има 7 дена: понеделник, вторник, среда, четврток, петок, сабота и недела. Потоа:

$\frac{1}{7}$ од неделата =______ дена; $\frac{3}{7}$ од неделата =______ дена; $\frac{\quad}{7}$ од неделата = 5 дена.

Задача. Знаеме дека 1 кг има 1 000 грама, тогаш:

$\frac{3}{5}$ од 1 kg =______ g $\frac{1}{2}$ од 1 kg = ______ g

Слика 48: Примена на дропките во секојдневните животни проблеми

За последната фаза од оваа наставна единица подготвивме неколку контролни задачи, при чие решавање ученикот покажува дека неговото разбирање напредувало до највисоките нивоа на разбирање на „Структурирање“ и на „Создавање“. Тоа се докажува со фактот дека тој е способен да аргументира и да ги оправдува сопствените заклучоци, да поставува прашања и да се обиде да го примени своето знаење и разбирање во решавањето на други слични проблеми.

Анализа на писмените подготовки за наставниците и на работните листови за учениците за третиот час во кој ја обработивме наставната единица: **„Дропки што покажуваат ист дел од целината“**.

За оваа наставна единица ги составивме следните резултати од учењето:

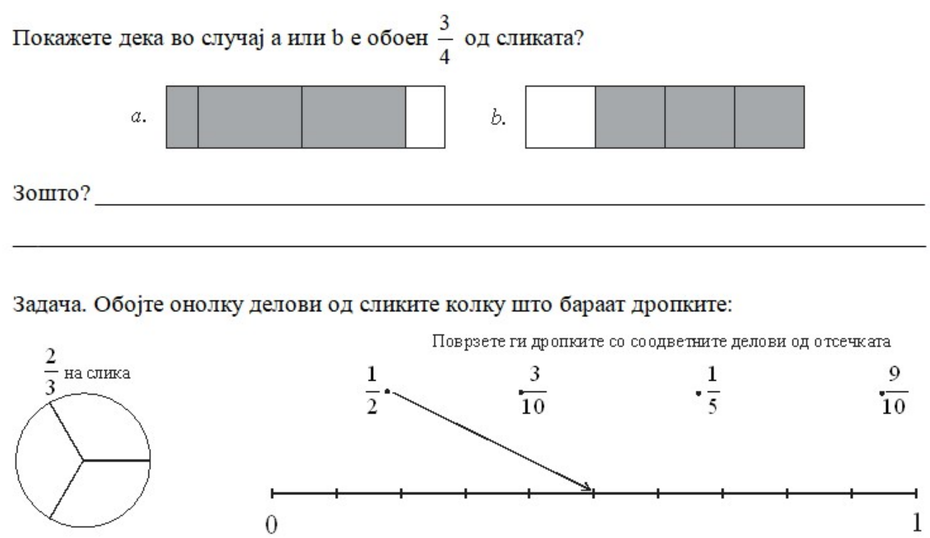
- Разликува дропки што покажуваат ист дел од целина.
- Преку графички прикази толкува еднакви дропки и обратно.
- Открива правило со кое се добиваат нови еднакви дропки на дадената дропка.

Овие резултати од учењето за наставната единица придонесуваат за постигнување на исходите од учењето за темата „Дропки“, предвидени со Наставната програма за областа математика дизајнирана од MASHT-а:

- Разликува дропки што означуваат ист дел од целина.

Во воведниот дел се обидовме да истакнеме што е можно повеќе предзнаења, неопходни за овој час/наставна единица, кои се сметаат за „примитивно знаење“ врз кое ќе се градат другите нивоа на разбирање според Теоријата Пирие-Киерен.

Така, создадовме некои задачи и специфични барања, како што се: идентификување на случај (слика) кога ¾ се обоени и тоа е дадено во писмена форма (зад. 1); следното барање (зад. 2.а.) да се обојат 2/3 од сликата (кругот) и да ги поврзе дропките со соодветните делови од отсечката (зад. 2.б.); како и другите две барања во кои се бара од дадена количина ученикот да разликува онолку делови од величината колку што покажува дропката. Преку овие примери имавме за цел да го дадеме и да го зајакнеме квантитативното разбирање на дропките, што е една од главните препораки на дидактичарите и на методичарите за учење дропки.



Слика 49: Ученикот ги идентификува случаите кога големините (фигурите) се делат на еднакви делови, потоа одвојува и обојува онолку делови од тие фигури (големини) колку што покажуваат соодветните дропки

Дропките се претставени и визуализирани на различни начини со цел учениците да ги видат и да ги разберат дропките од различни перспективи и контексти.

Додека ги решава овие задачи, ученикот докажува дека „создал“ и „поседува“ најразновидни слики поврзани со дропки и дека е способен да ги „открие“ и „да ги истакне“ нивните различни својства, како што е „формализирањето“. Всушност, сите тие се формални нивоа на Теоријата Пирие-Киерен. Исто така, при решавањето на овие задачи, на учениците што заостануваат во разбирањето на задачите им се овозможува идентификација на можните заостанувања и нивна корекција.

Задача. Во гајбата има 40 јаболка, од кои $\frac{3}{10}$ се кисели јаболка, а другите се слатки.

Колку кисели и колку слатки јаболка има во гајбата:

Кисели _______________ јаболка.

Слатки ______________ јаболка.

Задача. Беса собра 45 цвеќиња. Со $\frac{5}{9}$ од нив направила венец. Колку цвеќиња употреби за круната, а уште колку цвеќиња користеше Беса?

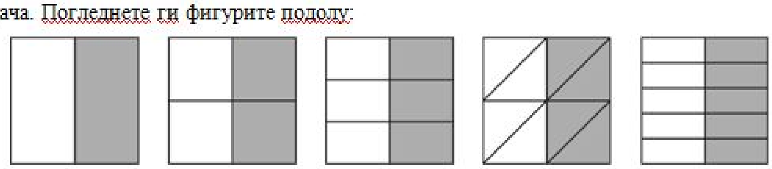
За круната користеше __________ цвеќиња.

Ѝ останаа уште _______________ цвеќиња.

Слика 50: Ученикот го применува разбирањето на дропките во решавање на секојдневните животни проблеми

Сето ова се цврсти основи врз кои го изградивме главниот дел од часот/наставната единица. Преку следниот пример имавме за цел ученикот да забележи дека ист дел од целината може да се прикаже преку навидум различни дропки. Задачата е придружена и со две конкретни прашања, а напорите на ученикот да одговори на овие прашања го тераат да истражува и да открие дека се работи за еднакви дропки.

Задача. Погледнете ги фигурите подолу:



$\frac{1}{2}$ $\quad \frac{\ }{4}$ $\quad \frac{3}{\ }$ $\quad -$ $\quad -$

Што забележуваме овде? ____

____

Колкава големина на сликата претставуваат дропките $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \frac{5}{10}$ __________

____

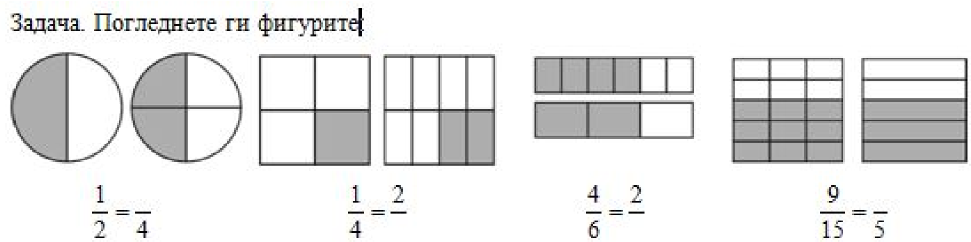
Дропките $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \frac{5}{10}$ иако се пишуваат и се читаат различно, тие укажуваат на еднакви големини.

Значи, $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}$, $\quad \frac{1}{2}=\frac{3}{-}$, $\quad \frac{1}{2}=\frac{-}{8}$, $\quad \frac{1}{2}=-$ $\quad$ или $\frac{1}{2}=\frac{-}{4}=\frac{3}{-}=-=-=-$.

Слика 51: Давање смисла на еднакви дропки

Од сето ова забележуваме дека разбирањето на ученикот е проширено и може да кажеме дека тој е на ниво на „формализација“ бидејќи сега е способен да прави општи описи и расудувања кои до определен степен се речиси еквивалентни на дефинициите за математичка формалност, како во нашиот конкретен случај во однос на еднаквоста на дропките.

Со цел да го консолидираме прелиминарното ниво на разбирање, како и да преминеме на други надворешни нивоа на разбирање на Теоријата Пирие-Киерен, го дизајниравме следниот пример во кој преку различни претстави дадовме други примери на дропки што покажуваат еднакви делови од целината (еднакви дропки).



Слика 52: Еднакви дропки

Потоа го повикуваме ученикот да ги набљудува двете еднакви дропки со тоа што на реципрочен начин ќе го анализира односот меѓу нивните соодветни елементи (броителите и именителите). Ова го правиме со цел ученикот да види дека меѓу броителите и именителот на две еднакви дропки има определен однос меѓу нив. Значи, овде се трудиме ученикот да го разбере, да го разјасни и да го примени начинот како од дадена дропка се добиваат други дропки еднакви на дадената дропка. Во овој случај може да кажеме дека разбирањето на ученикот е на ниво на **набљудување** бидејќи од размислувањата за формалните активности во кои учествувал на ниво на формализирање, тој се обидува да бара обрасци и врски за да ги дефинира сопствените формални идеи како алгоритми или како теореми за еднаквоста на дропките.

Слика 53: Изведување на дефиницијата за проширување и за поедноставување дропки

Преку различни барања, задачи и прашања се трудиме ученикот да покаже со расудување и со проверување на заклучоците кога имаме еднакви дропки, како и за начинот на кој се добива корист од нив преку операциите на нивно проширување и поедноставување. Сега ученикот со зборови може да опише, да илустрира и да покаже со различни примери и графички илустрации како може да се добијат две или повеќе дропки еднакви на дадената дропка, со што ќе докаже дека го совладал седмото ниво и претпоследното математичко разбирање „**Структурирање“** според Теоријата Пирие-Киерен во однос на оваа наставна содржина.

Анализа на писмените подготовки за наставниците и на работните листови за учениците за четвртиот час во кој ја обработивме наставната единица **„Споредба на дропки со ист броител и именител“.**

За оваа наставна единица ги предвидовме следните исходи од учењето:

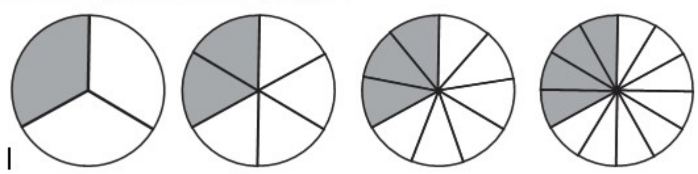
- Споредува дропки со ист именител/броител.
- Ги изведува и ги искажува правилата за споредување дропки со ист именител/броител.

Овие резултати придонесуваат за постигнување на исходите од учењето за темата „Дропки“, предвидени со Наставната програма за областа математика дизајнирана од MASHT-а:

- Споредува дропки со ист именител/броител.

За воведниот дел од оваа наставна единица дизајниравме 4 примери (задачи) тесно поврзани еден со друг, преку кои сакавме да ги истакнеме сите знаења што ги има ученикот за дропките, особено во однос на еднаквите дропки. Исто така, преку овие примери се овозможува лесно да се идентификуваат евентуалните доцнења, а потоа да се надминат и да се исправат.

Задача. Што забележуваме од овие фигури?



$$\frac{1}{3} = \frac{2}{\ } = \frac{\ }{9} = \frac{\ }{\ }$$

Имаме дропки кои иако се пишуваат и читаат различно, претставуваат еднакви големини, значи тие се еднакви дропки.

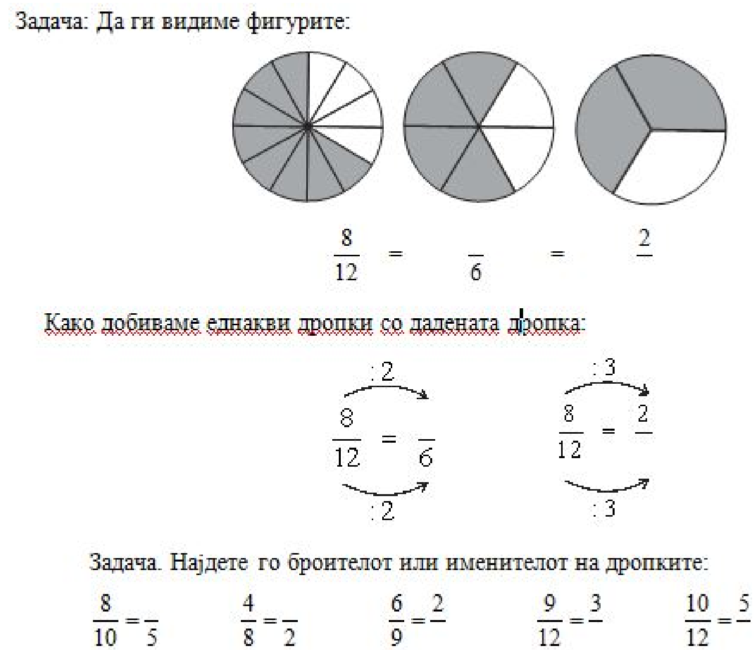
Значи, $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \frac{4}{12}$

Како добиваме еднакви дропки со дадената дропка?

$$\frac{1}{3} \overset{\times 2}{\underset{\times 2}{=}} \frac{\ }{6} \qquad \frac{1}{3} \overset{\times 3}{\underset{\times 3}{=}} \frac{3}{\ }$$

Слика 54: Појаснување на значењето на еднаквите дропки. Проширување на дропката

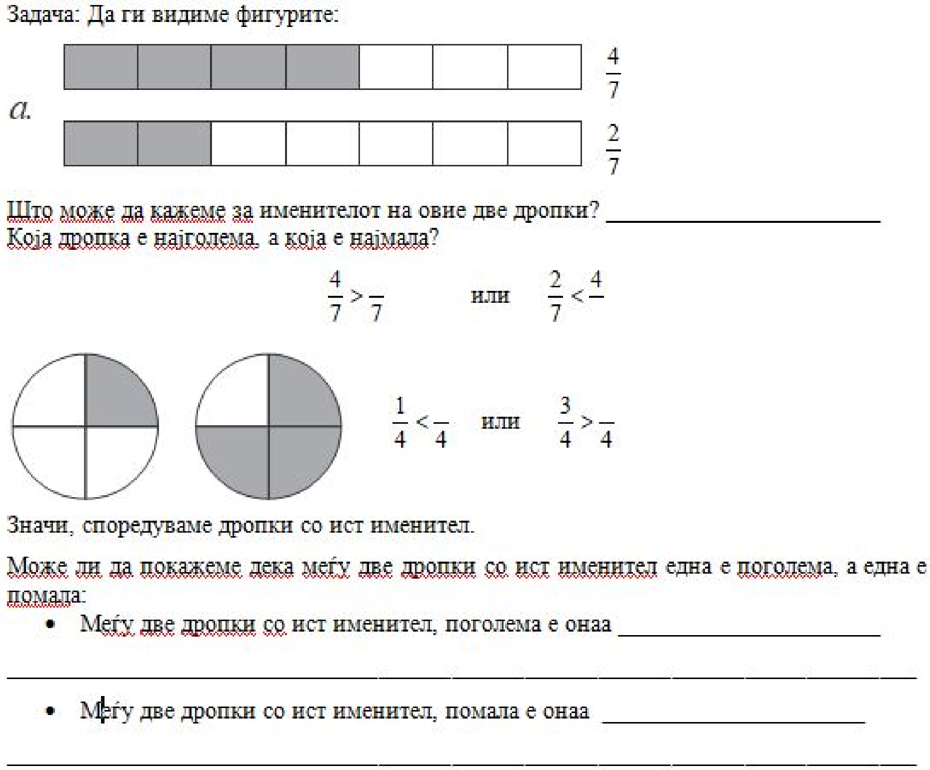
Во процесот на решавање на овие примери, ученикот докажува дека го разбира фактот дека, иако на прв поглед дропките изгледаат различно, тие покажуваат ист дел од една целина – еднакви дропки, а потоа може да илустрира преку разни графички прикази и примери од секојдневниот живот дека умее да создава и да пишува дропки што покажуваат иста големина – еднакви дропки. Исто така, тој докажува дека е способен да ги формализира начините и правилата на користа од еднакви дропки (проширување и поедноставување на дропките). Значи, неговото општо разбирање за дропките и особено за еднаквите дропки е на задоволително ниво и сето тоа ќе го искористиме како цврста основа (примитивно знаење) во градењето разбирање за споредување на дропките.



Слика 55: Појаснување на значењето на еднаквите дропки. Поедноставување на дропката

Во следните два примера, кои се придружени со добри илустрации и специфични барања, ученикот лесно може да определи споредба на дропки со ист именител. Преку нив создава и успева да ја совлада идејата (сликата) кога една дропка е поголема или помала од друга дропка со ист именител.

Преку некои барањи и сугестивни прашања, го поттикнуваме ученикот да размисли кога една дропка е поголема или помала од друга и на тој начин тој почнува да ги апстрахира заедничките својства на овие слики. На овој начин тој почнува да развива формални математички идеи, а во нашиот случај и за споредување дропки со ист именител. Така, сметаме дека го доведовме ученикот до степен на **формализирање** на разбирањето.



Задача: Да ги видиме фигурите:

а.

$\frac{4}{7}$

$\frac{2}{7}$

Што може да кажеме за именителот на овие две дропки? ______________________
Која дропка е најголема, а која е најмала?

$\frac{4}{7} > \frac{\ }{7}$ или $\frac{2}{7} < \frac{4}{\ }$

$\frac{1}{4} < \frac{\ }{4}$ или $\frac{3}{4} > \frac{\ }{4}$

Значи, споредуваме дропки со ист именител.

Може ли да покажеме дека меѓу две дропки со ист именител една е поголема, а една е помала:

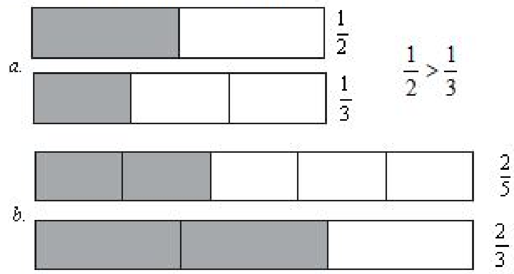
- Меѓу две дропки со ист именител, поголема е онаа ______________________
____
- Меѓу две дропки со ист именител, помала е онаа ______________________
____

Слика 56: Споредување дропки со ист именител

Слично постапивме и со споредбата на дропки со ист броител. Овде посветивме посебно внимание на тоа што ученикот ги истакнува особеностите и спецификите на споредувањето дропки со ист броител. И овде ученикот треба да може да го **формализира** своето разбирање за споредување дропки со ист броител.

Во продолжение, преку примери, упатства и конкретни прашања, како и преку набљудување на формални активности, имавме за цел ученикот да се обиде да види и да создаде модели поврзани со споредба на дропки со ист именител или со ист броител и со ова јасно докажува дека тој го поседува формалното ниво **„Набљудување“** во однос на разбирањето според Теоријата Пирие-Киерен.

Задача. Да ги видиме фигурите:



a. $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$ $\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$

b. $\frac{2}{5} < \frac{2}{3}$ $\frac{2}{3} > \frac{2}{5}$

Значи споредуваме дропки со ист броител.

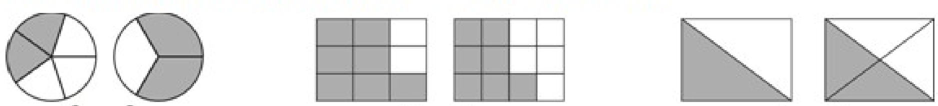
Може ли да покажеме дека меѓу две дропки со ист броител една е поголема, а една е помала:

- Меѓу две дропки со ист броител, поголема е онаа ______________________
____
- Меѓу две дропки со ист броител, помала е онаа ________________________
____

Слика 57: Споредување дропки со ист броител

Следниве примери ги дизајниравме на тој начин што ученикот врз основа на сегашното разбирање, како и од набљудувањето на различни графички прикази, да може да споредува дропки со ист именител или броител. И сите овие постапки и дејства потоа успева да ги апстрахира, да ги опише и да ги формализира во разбирањето на споредбата на дропките. Тоа го докажува со определување на дропките (со ист именител или броител) според големината од најмалата кон најголемата или обратно. Сето ова ни е доволно да забележиме дека ученикот го поседува формалното ниво **„Структурирање“** на математичкото разбирање според Теоријата Пирие-Киерен.

Задача. Поставете еден од симболите >, <, =, помеѓу дропките:



$\frac{2}{5}$ ___ $\frac{2}{3}$ $\frac{7}{9}$ ___ $\frac{7}{12}$ $\frac{1}{2}$ ___ $\frac{2}{4}$

Задача. Поставете еден од симболите >, <, =, помеѓу дропките:

a. $\frac{1}{3}$ ___ $\frac{1}{3}$ $\frac{3}{7}$ ___ $\frac{1}{7}$ $\frac{7}{9}$ ___ $\frac{3}{9}$

b. $\frac{2}{3}$ ___ $\frac{2}{5}$ $\frac{4}{7}$ ___ $\frac{4}{9}$ $\frac{3}{6}$ ___ $\frac{3}{5}$

Задача. Подреди ги дропките од најмали до најголеми:

$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{10}$ ______________________

$\frac{7}{9}, \frac{5}{9}, \frac{2}{9}, \frac{4}{9}$ ______________________

Слика 58: Задачи поврзани со споредување дропки со ист именител или броител, определување по големина

3.2.3.2. Анализа на наставни часови во согласност со Теоријата Пирие-Киерен за IV одделение

Како што споменавме погоре, за IV одделение подготвивме писмени подготовки за наставниците и работни листови за учениците за пет наставни единици за експерименталните одделенија вклучени во истражувањето.

Анализа на писмените подготовки за наставниците и на работните листови за учениците за првиот час во кој ја обработивме наставната единица **„Дропки и нивното значење“**.

За оваа наставна единица ги составивме овие резултати од учењето:

- Графичките прикази, со конкретни материјали, зборови и симболи се претставени како дропки и обратно.

- Го објаснува значењето на броителот и на именителот.

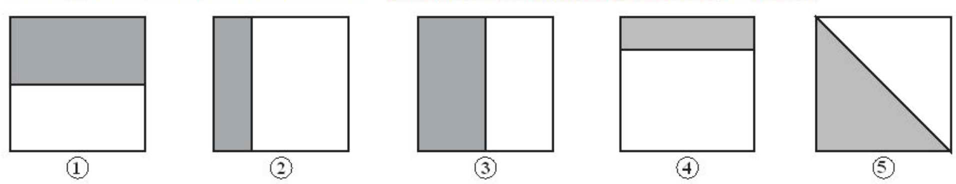
Овие резултати од учењето за наставната единица придонесуваат за постигнување на исходите од учењето за темата „Дропки“, предвидени со Наставната програма за областа математика дизајнирана од MASHT-а:

- Графички прикази на дропките, ги прикажува како дропки и обратно.

- Претставува дропки користејќи конкретни материјали, зборови и едноставни симболи на дропки и го објаснува значењето на именителот и на броителот.

За да се ажурира првичното знаење или **„примитивното знаење“** што го поседува ученикот, преку првиот пример го повикуваме внимателно да ги набљудува дадените фигури (квадрати). Веднаш под овие бројки презентиравме неколку прашања преку кои ќе се обидеме да го изведеме фактот дека сите фигури се поделени на два дела, но некои од нив, на пример, сликите 1, 3 и 5 се поделени на два еднакви дела, додека сликите 2 и 4 се поделени на два нееднакви дела.

Погледнете ги внимателно сликите. Што може да кажеме за нивната поделба?



Како се поделени фигурите? ______________________________
____

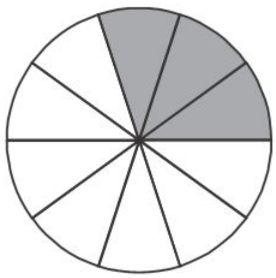
Како се поделени фигурите 1, 3 и 5? ______________________________

А фигурите 2 и 4? ______________________________

Слика 59: Изведување на значењето на дропките. Нагласување на фактот дека кај дропките се разгледуваат само случаите кога имаме поделба на целина на еднакви делови

За да се нагласи фактот дека кај дропките се разгледуваат само случаите кога имаме поделба на големини на еднакви делови, слично како и во претходниот пример, го повикуваме ученикот внимателно да ја набљудува фигурата (кругот) во следниот пример и потоа се обидуваме да дадеме одговори на поставените прашања. Дадените одговори треба да нè уверат дека ученикот ја создал сликата (идејата) за делење на целината на еднакви делови.

Задача. Да ја видиме фигурата:

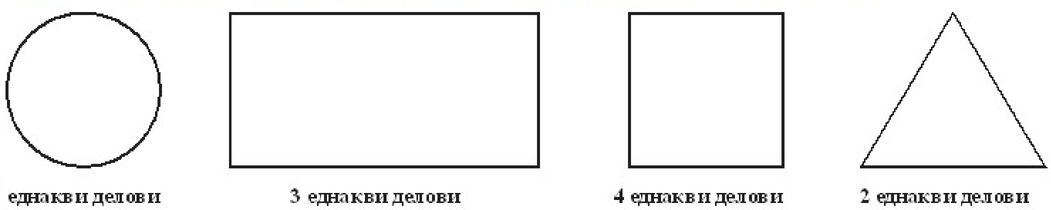


1. На колку еднакви делови е поделен кругот? ___________
2. Од овие 10 еднакви делови се обоени __________ делови.
3. Не се обоени ______________________ делови.

Слика 60: Разбирање на дропката и на нејзините елементи

За да се увериме дека ученикот има слика (идејата) за делење на големината на еднакви делови, во следниот пример бараме од ученикот да ги подели фигурите на онолку еднакви делови колку што е потребно за секоја од нив.

Задача. Поделете ги дадените фигури на онолку еднакви делови колку се бара:

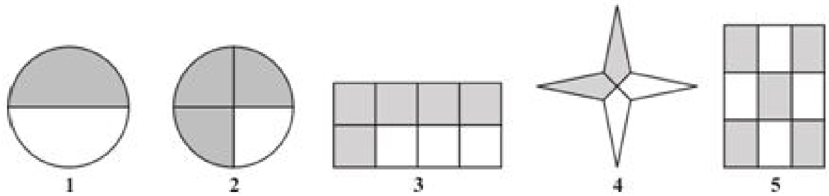


Слика 61: Ученикот ја дели секоја фигура на онолку еднакви делови колку што се бара

Сите знаења презентирани во воведниот дел од оваа наставна единица ни овозможуваат да преминеме на главниот дел од оваа наставна единица.

Во следниот пример дизајниравме различни фигури кои се поделени на неколку еднакви делови, некои од нив се разликуваат (обоени), а некои не. Подолу бараме од ученикот да ја пополни табелата според соодветните барања. Од пополнувањето на оваа табела, како и од коментарите што ќе се појават во оваа прилика, но и од одговорите на следните прашања, мислиме дека учениците ќе бидат во состојба да разберат дека најдобриот начин за означување на истакнатите (обоени) делови од севкупноста на сите делови на кои е поделена фигурата е дропката. Во овој случај, ученикот мора да ги идентификува елементите на дропката (именителот и броителот) нагласувајќи ги нивното значење и улога и со тоа практично да покаже дека неговото разбирање е на ниво на акцентирање на својствата. Во исто време, ученикот успева да го формализира значењето на дропката и на нејзините составни елементи.

Задача. Погледнете ги сликите:



Пополнете ја табелата подолу:

Фигури	На колку еднакви делови е поделена фигурата?	Колку делови се обоени?	Колку делови не се обоени?
1	2	1	1
2			
3			
4			

Што може да кажеме за секоја фигура, колку делови од неа се обоени?

На пример, сликата 2 е поделена на 4 дела, 3 од нив се обоени, а потоа запишуваме $\frac{3}{4}$.

Слика 1. ____

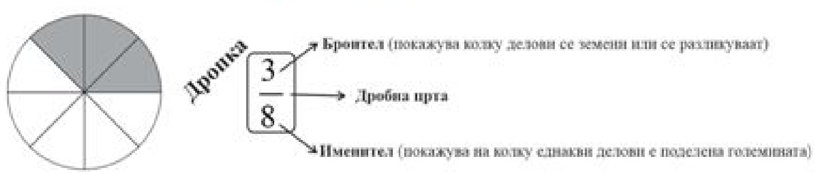
Слика 2. е поделена на 4 дела, 3 од нив се обоени $\frac{3}{4}$.

Слика 3. ____

Слика 4. ____

Слика 5. ____

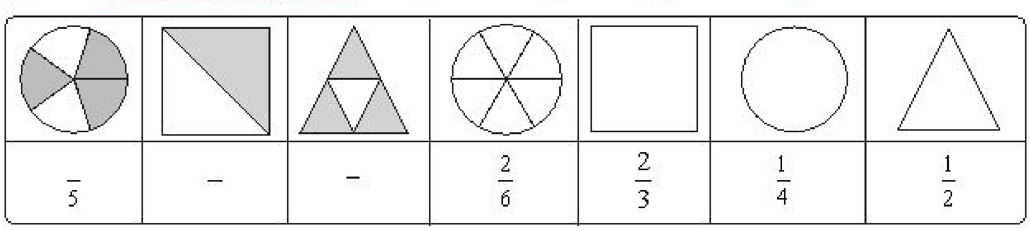
Забелешка: $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{8}, \frac{2}{4}, \frac{5}{9}$ се нарекуват **ДРОПКИ!**



Слика 62: Со набљудување на сликите, со одговарање на сугестивни прашања и со пополнување на табелата, ученикот умее да го разјасни значењето на дропката и на нејзините елементи

Претпоследната задача е дизајнирана така што при обидите да се анализира и да се дадат одговори на специфичните барања, ученикот се вклучува во свесни напори да го зголеми своето разбирање бидејќи веќе има формализирано разбирање. Примерот е богат со најразлични форми и графички претстави, како и со симболични претстави. При решавањето на овој пример ученикот докажува дека неговото разбирање припаѓа на нивото „**Набљудување**“.

Задача. Пополнете ги барањата и извршете ги бараните дејства на следниов начин:



Слика 63: Ученикот ги означува дропките и нивните елементи (броител или именител) што ги прикажуваат обоените делови од целината и обратно, разликува или бои онолку делови од фигурите колку што покажуваат соодветните дропки

И, конечно, од претходниот пример, како и од формалното и обопштено разбирање, ученикот сега може да размислува за конкретни обрасци. Тој сега може да расудува и да потврди зошто го разликува овој или оној дел од фигурите, да пресметува делови од големини што претставуваат дропки и на тој начин го поседува седмото формално ниво на разбирање според Теоријата Пирие-Киерен „**Структурирање**“.

Слика 64: Ученикот идентификува, бои и доделува онолку делови од фигури и големини колку што покажуваат соодветните дропки

Анализа на писмените подготовки за наставниците и на работните листови за учениците за вториот час во кој ја обработивме наставната единица **„Дропки помали од 1 и еднакви на 1“**.

За оваа наставна единица ги предвидовме следните исходи од учењето:

- Определува дропки помали од 1 или еднакви на 1, анализирајќи го односот меѓу броителот и именителот.

- Претставува и толкува графички и со конкретни материјали дропки помали од 1 или еднакви на 1.

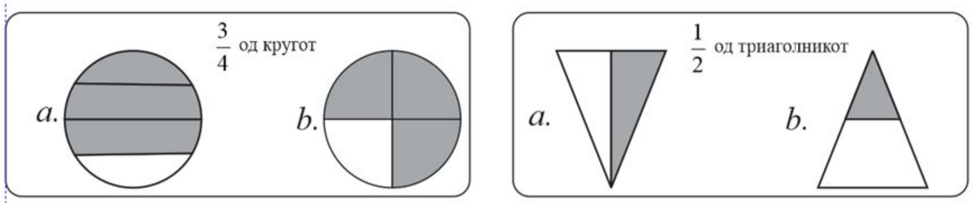
Овие резултати придонесуваат за постигнување на исходите од учењето за темата „Дропки“, предвидени со Наставната програма за областа математика дизајнирана од MASHT:

- Дефинира дропки помали од 1 и еднакви на 1.

- Ја определува дропката за да стигне до целината и го оправдува дејството.

Во воведниот дел од оваа наставна единица, преку првиот пример, побаравме од ученикот да ги идентификува случаите кога сме обоиле онолку делови од сликата колку што покажуваат соодветните дропки. Ова го направивме за да му го нагласиме на ученикот главното својство за разбирање на дропките, односно дека се испитуваат само случаите кога имаме поделба на големината на еднакви делови.

1. Покажете во кој случај делот од фигурите е поделен и обоен како што бараат дропките:



Забелешка: Се разгледуваат само случаите кога имаме поделба на целината на еднакви делови.

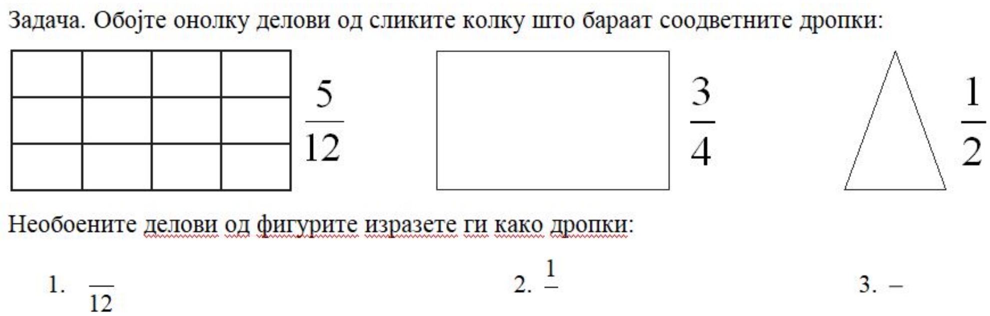
Слика 65: Ученикот разликува случаи (фигури) што се делат на еднакви делови

Во следните два примера, со помош на различни графички прикази сакавме ученикот да се запознае со квантитативниот карактер на дропката при нејзината обработка. Преку конкретни прашања го повикуваме ученикот да разликува типови на елементи (предмети) од иста природа во мноштвото различни елементи и предмети на заедницата и преку соодветните дропки да го прикаже нивното количество во однос на севкупноста на елементите на заедницата.

Задача. Анализирајќи ги сликите, одговорете ги и пополнете ги прашањата и барањата:

Слика 66: Претставување со помош на дропки на делови од елементи (предмети) што имаат иста природа на множества

Во следниот пример, бараме од ученикот да обои онолку делови од првата фигура колку што бараат дропките, додека во втората и во третата фигура прво треба да ги подели на еднакви делови, па да обои онолку делови од нив колку што бараат соодветните дропки.



Слика 67: Ученикот бои, дели или разликува онолку делови од фигурите колку што претставуваат соодветните дропки

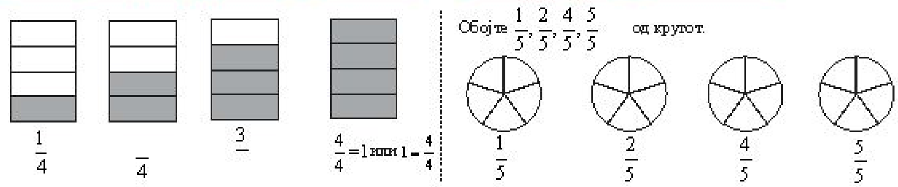
Примерите во писмените подготовки за наставниците и во работните листови за учениците во овој дел од наставната единица се дизајнирани така што учениците лесно може да ги покажат проблемите и евентуалните недостатоци во разбирањето на дропките, а потоа да се поправат во соработка со другите ученици и со наставникот.

Сите овие примери, задачи и барања треба да покажат дека учениците имаат задоволителни нивоа на разбирање на дропките бидејќи во текот на нивната обработка учениците покажуваат дека развиле и совладале разбирање за дропките, дека се способни да ги нагласат значењето и својствата на елементите на дропката (именители и броители), дека ги знаат нивното значење и улога. Докажуваат и дека успеале да го формализираат разбирањето на дропките.

И така, се погрижившме учениците да се опремат со доволно и потребно знаење за да продолжат со главниот дел од оваа наставна единица.

Првиот пример од овој дел е дизајниран така што уште од почетокот, од набљудувањата, ученикот може да види кои од дропките претставуваат големина помала од една (1) целина, а која една (1) целина; додека во вториот дел се бара да обои онолку делови од сликата колку што покажува дропката и на тој начин тој создава и поседува идеја (слика) за дропки помали од една (1) и еднакви на една (1) целина. Потоа преку сугестивни прашања и за време на разговор со други ученици под контрола на наставникот, ученикот ги изведува карактеристиките (ги нагласува својствата) на дропките помали од 1 и еднакви на 1. Така, тој потоа може да ги формализира случаите каде што има дропки помали од 1 и кога е еднакво на 1. Потоа, преку следниот пример, имавме за цел да ги зајакнеме и да ги консолидираме сегашните нивоа на разбирање според Теоријата Пирие-Киерен за да обезбедиме можност за издигнување на разбирањето на учениците на повисоки нивоа.

Задача. Што може да кажеме за дропките и за големините што ги прикажуваат тие?



Од сликите забележуваме дека имаме дропки кои претставуваат големина помала од 1 и некои големини еднакви на 1.

Значи, $\frac{1}{4} < 1,\ \frac{2}{4} < 1,\ \frac{3}{4} < 1$

$\frac{1}{5} < 1,\ \frac{2}{5} < 1,\ \frac{3}{5} < 1,\ \frac{4}{5} < 1$

Кога дропката е помала од 1?

____

____

Што може да кажеме за дропките $\frac{4}{4}$ или $\frac{5}{5}$?

Значи, дропката $\frac{4}{4} = 1$ или $\frac{5}{5} = 1$.

Кога дропката е еднаква на 1?

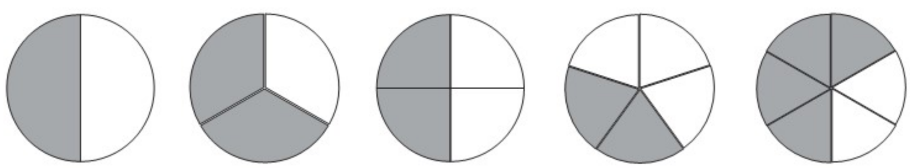
____

____

Слика 68: Појаснување на дропките што претставуваат величини еднакви на 1 и помали од 1

Во следниот пример, од ученикот се бара да размисли и да најде колку е потребно за количините да станат цели т.е. за секоја дропка (помалку од 1) да ја пронајде соодветната дропка (исто така помала од 1) за да се добие целина. Се разбира, бевме свесни дека ученикот сѐ уште не научил за собирање дропки, но тоа не треба да биде проблем.

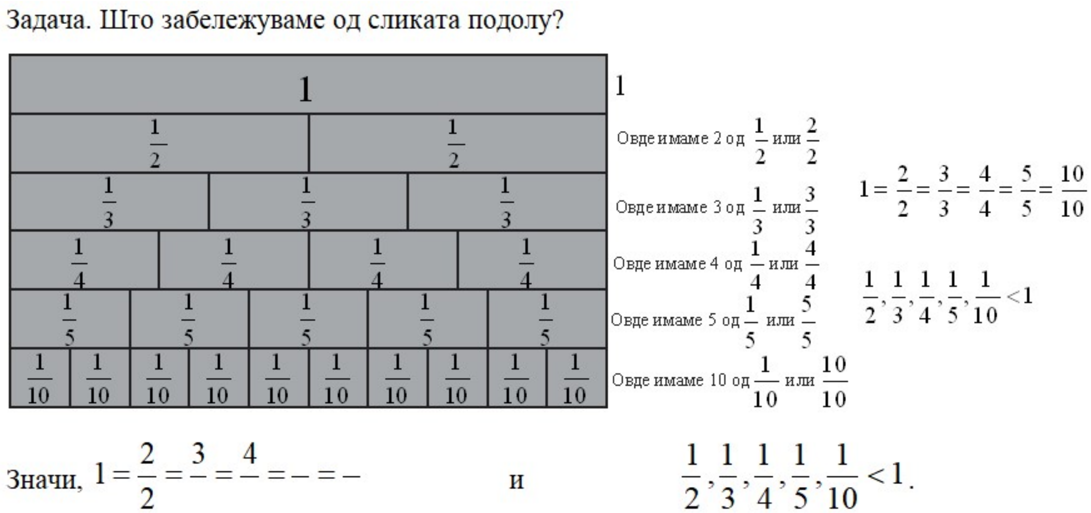
Задача. Погледнете ги внимателно сликите. Уште колку делови треба да завршат како 1 целосна големина?



$1 = \frac{1}{2} + -$ $\quad 1 = \frac{2}{3} + -$ $\quad 1 = \frac{2}{4} + -$ $\quad 1 = \frac{2}{5} + -$ $\quad 1 = \frac{4}{6} + -$

Слика 69: Комплетирање на 1 целина

Следниот пример ни овозможува да потврдиме и да заклучиме дека ученикот е способен да размислува за формалните активности и е способен да ги организира своите идеи и разбирањето на дропките помали од и еднакви на 1 на конзистентен и логичен начин. Така, тој докажува дека неговото разбирање е на ниво на набљудување. Додека работи со овој пример, исто така, тој може да ги набљудува и да ги проверува преку бројки и графички прикази своите изјави за дропките помали и еднакви на 1, како и да расудува и да ја докажува нивната вистина. На овој начин ученикот ни докажува дека е на седмото ниво на разбирање **„Структурирање“** според Теоријата Пирие-Киерен.



Слика 70: Илустрација на дропки еднакви на 1 и на дропки помали од 1

Анализа на писмените подготовки за наставниците и на работните листови за учениците за третиот час во кој ја обработивме наставната единица **„Дропките како дел од број“**.

За оваа наставна единица ги предвидовме следните исходи од учењето:

- Определува дел од број или од големината или од елементите на множествата.
- Применува дропки за решавање на текстуални задачи (од секојдневниот живот).

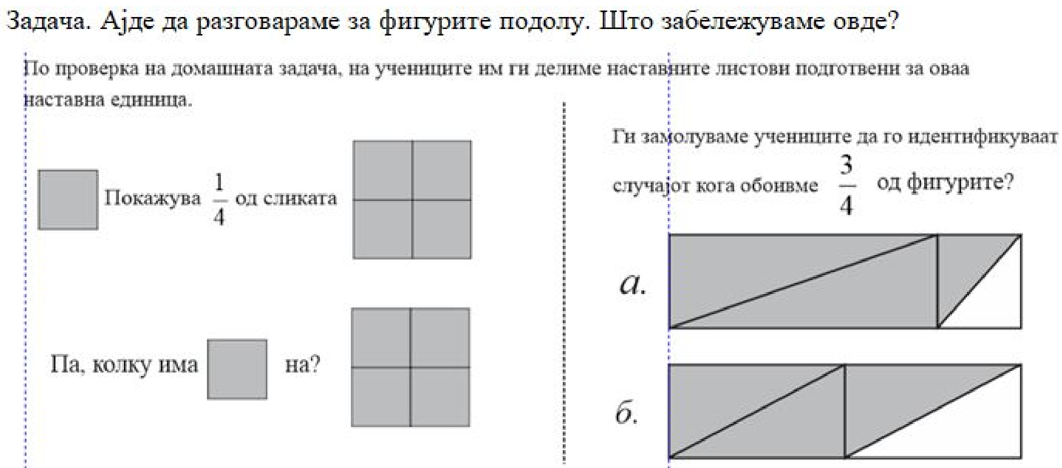
Овие резултати придонесуваат за постигнување на исходите од учењето за темата „Дропки“, предвидени со Наставната програма за областа математика дизајнирана од MASHT-а:

- Определува дел од број;
- Решава зборовни задачи (од секојдневниот живот) со помош на дропки.

За воведниот дел од оваа наставна единица дизајниравме примери со специфични барања преку кои учениците го развиваат своето разбирање за дропките од сето она што досега беше кажано за нив. Исто така, ова го направивме со цел ученикот да се подготви да продолжи со другите фази од часот, како и да го развие и да го прошири своето разбирање на повисоки нивоа на разбирање. Истовремено, како и во другите наставни единици, преку овие примери учениците кои заостануваат, може да ги поправат и да ги надминат пропустите.

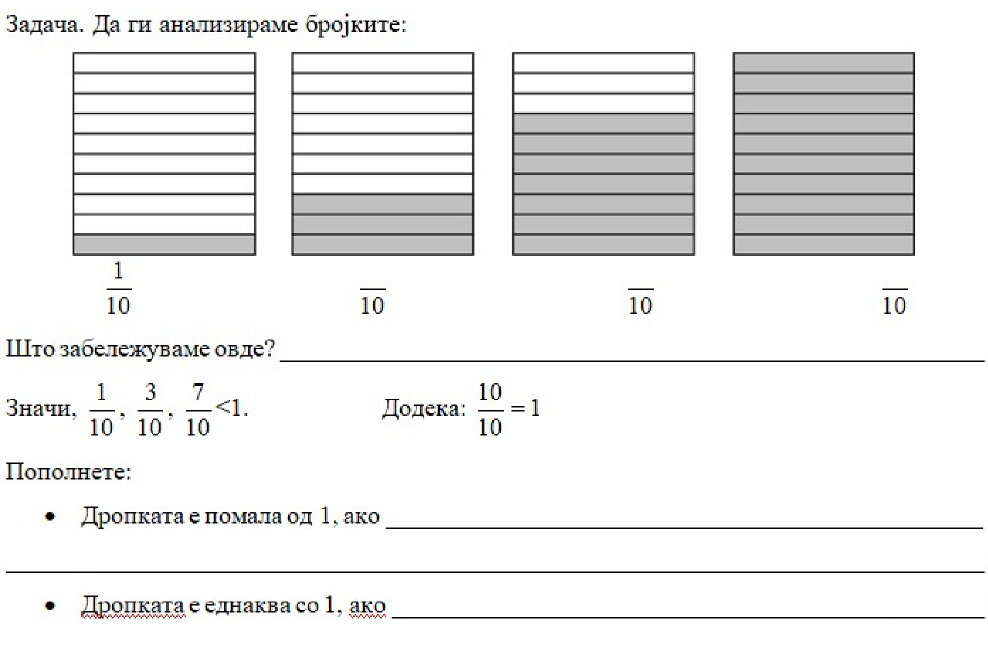
И овде ги потсетивме учениците дека во дропки се испитуваат само случаите кога целината е поделена на еднакви делови, како на пример, преку барањето да се идентификува случајот кога сме обоиле онолку делови од фигурата колку што покажува дропката.

Преку илустрираното барање колку четвртини (1/4) од фигурата има целата (слика)?, сакавме ученикот да воспостави реципрочни односи меѓу делот од големината што прикажува дропки со самата големина.



Слика 71: Односот меѓу една (1) цела големина и нејзините делови

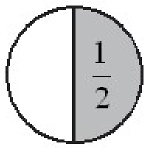
Во следниот пример илустриран со фигури, му наложуваме на ученикот да размисли за секој случај кој дел од нив е обоен, означувајќи ги со соодветните дропки. Потоа преку расудување и усни коментари во сугестивни прашања од наставникот и учениците за секој случај (слика) посебно, ученикот го манифестира своето ниво на разбирање за дропките помали од 1 и еднакви на 1.



Слика 72: Дропки помали од 1 и дропки еднакви на 1

Во другиот пример од воведниот дел од оваа наставна единица, исто така добро илустриран, бараме од ученикот да открие колку делови му се потребни за секој случај за да се комплетира една целина.

Задача. Пополнете:



$1=\frac{1}{2}+-$ $\quad \frac{1}{3}+-=1$ $\quad \frac{2}{3}+-=1$ $\quad 1=\frac{3}{7}+-$ $\quad -+\frac{6}{11}=1$ $\quad -+\frac{5}{9}=1$

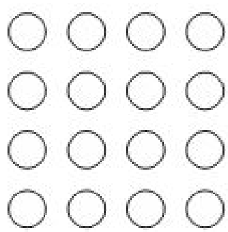
Слика 73: Комплетирање на една (1) целина

И така, проценуваме дека ги подготвивме учениците лесно да влезат во главната фаза на наставната единица.

Првично, заедно со учениците се навративме на дефинирањето на дропката и на значењето на нејзините елементи (именителот и броителот).

И ги покануваме учениците да го набљудуваат првиот пример во кој претставивме 12 кругови со иста големина и бараме од учениците да обојат ¾ од нив.

Задача. Разликувајте и обојте $\frac{3}{4}$ од 12 кругови на сликата.



Што забележуваме овде? $\frac{3}{4}$ од 12 кругови = ?

$(12:4)\cdot 3=3\cdot 3=9$

Значи, $\frac{3}{4}$ од 12 кругови претставува 9 кругови.

Објаснете како ги правевте пресметките: ____

____

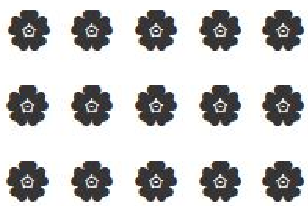
Слика 74: Илустрација на определување на дел од определена целина или количина

Од ученикот се бара да подели вкупно 12 кругови на четири дела (групи) по 3 кругови и да разликува и да обои 3 од овие групи од 3 кругови.

Потоа, преку конкретни прашања поставени во работните листови на ученикот, ученикот се поттикнува да размислува за целиот процес и да го формализира преку алгебарски изрази. Во барањата за оправдување формални дејства, ученикот покажува дека неговото разбирање е развиено и проширено, и како такво му припаѓа на нивото на набљудување бидејќи е способен да размислува за формалните активности, а може и да конструира правила на алгоритми, како во нашиот случај да се пресмета ¾ од 12.

За дополнително да го зајакнеме ова ниво, направивме уште еден пример во кој ученикот има задача да покаже колку цвеќиња претставуваат 2/3 од вкупно 12 цвеќиња?

Задача. Колку цвеќиња претставуваат $\frac{2}{3}$ од сите цвеќиња на сликата?



Колку цвеќиња има на сликата? ________________

$\frac{2}{3}$ од 15 цвеќиња = ____________________?

$(15:3)\cdot 2 = 5\cdot 2 = 10$

Слика 75: Илустрација на определување на определен дел од величина како што ја претставува соодветната дропка

Во продолжение на последниот дел од наставната единица, составивме неколку примери со илустрации, ситуации и контексти од секојдневието, како што се, на пример, купување и продавање, мерење, време, должина, тежина, со пари и со бројки. Како такви, овие примери ќе го прошират разбирањето на ученикот на повисоки нивоа на разбирање според Теоријата Пирие-Киерен.

Задача. Во продавница за овошје има 140 кг овошје. Од нив $\frac{2}{7}$ се јаболка, $\frac{3}{7}$ праски, $\frac{1}{7}$ крушки.

а. Колку кг јаболка има во продавницата? ____________

б. Колку кг праски има во продавницата? ____________

в. Колку кг круши има во продавницата? ____________

г. Дали има друго овошје во продавницата? ____________

Задача. Пресметајте:

1 година има 12 месеци, тогаш $\frac{1}{3}$ од 1 год. = ____________ месеци.

1 месец има 30 дена, тогаш $\frac{3}{5}$ од 1 месец = ____________ дена.

1 км има 1 000 м, тогаш $\frac{7}{20}$ од 1 км = ____________ m.

1 евро има 100 центи, тогаш $\frac{7}{10}$ од 1 € = ____________ центи.

Задача. Блина имала 80 евра. Потрошила $\frac{5}{8}$ од нив. Колку евра ѝ останале на Блина?

Задача. Пресметајте:

$\frac{2}{5}$ од 25= ______ $\frac{4}{7}$ од 28= ______ $\frac{7}{10}$ од 60= ______

Слика 76: Примена на дропките во секојдневните животни проблеми

Примерите се определени и логично поврзани еден со друг, тие се во функција еден на друг и даваат добра и стабилна основа за градење нови сфаќања за дропките.

Анализа на писмените подготовки за наставниците и на работните листови за учениците за четвртиот час во кој ја обработивме наставната единица **„Споредба на дропки со ист именител и дропки со ист броител“**.

За оваа наставна единица ги предвидовме следните исходи од учењето:

- Споредува дропки со ист именител/броител.
- Изведува и искажува правила за споредување дропки со ист именител/броител.
- Формира еднакви дропки со нивно проширување и поедноставување.

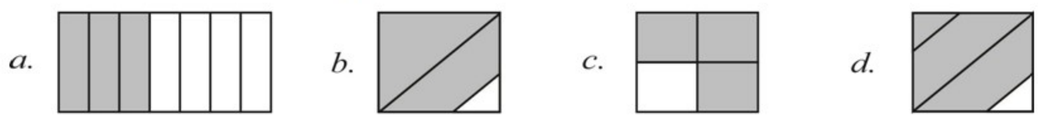
Овие резултати од учењето за наставната единица придонесуваат за постигнување на исходите од учењето за темата „Дропки“, предвидени со Наставната програма за областа математика дизајнирана од MASHT-а:

- Споредува дропки со ист именител и броител.

- Формира еднакви дропки со нивно проширување (користи слики и цртежи).

Уште во оваа писмена подготовка за оваа наставна единица за наставниците и во работните листови за учениците, за воведниот дел од часот (евокација) преку првиот пример илустриран со неколку правоаголни и квадратни форми, сакавме да го засилиме во свеста на учениците фактот дека кај дропките се испитуваат само случаите кога имаме поделба на целината на еднакви делови.

На која од фигурите е обоена $\frac{3}{4}$ од фигурите?



Објаснете ____

Слика 77: Ученикот го идентификува и го опишува случајот (сликата) во која фигурата (целината) е поделена на еднакви делови

Исто така, во оваа фаза од наставната единица, преку вториот пример, сакавме да го нагласиме фактот дека секогаш кога се земаат две или повеќе големини (целини) за да се илустрира споредбата на дропките, тие мора да имаат ист облик и големина.

Задача. Мира, Мелоси и Мелина купиле пица со иста форма и големина.

Така, забележуваме дека трите изеле еднакви делови од пицата.

Значи, $\frac{1}{3}=\frac{2}{6}=\frac{3}{9}$

Како добиваме дропки еднакви на дадената дропка?

$$\overset{\cdot 2}{\frac{1}{3} = \frac{\ }{6}}\qquad \overset{\cdot 3}{\frac{1}{3} = \frac{3}{\ }}$$

Еднакви дропки на дадената дропка може да се добијат со ______________________

____

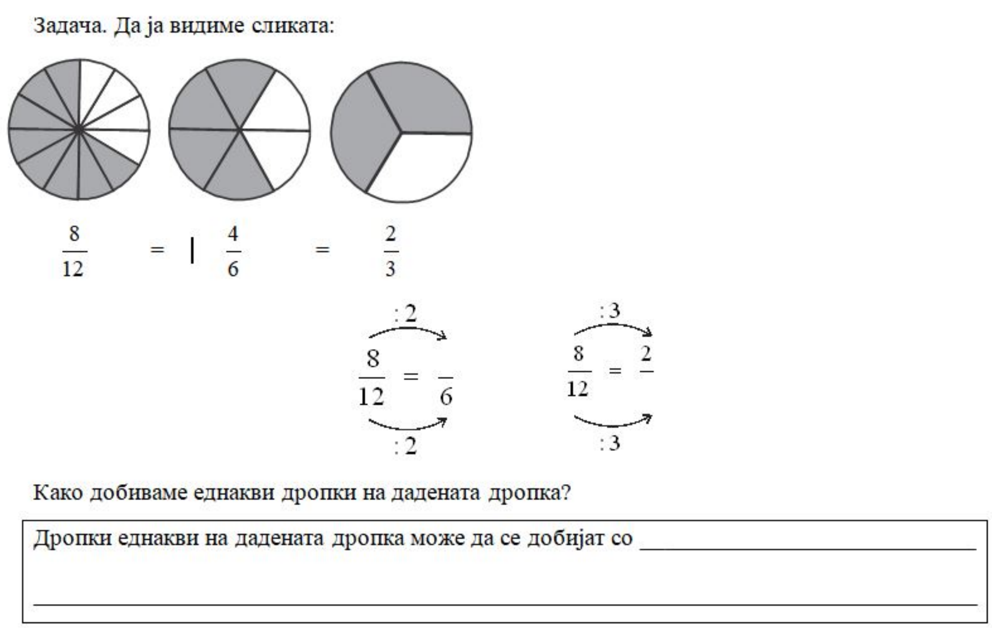
Слика 78: Илустрација на дропки кои покажуваат еднакви големини, еднакви дропки

Од овој пример, ученикот треба да разбере дека иако се чини дека дропките се различни, тие претставуваат иста големина. Значи, $\frac{1}{3}=\frac{2}{6}=\frac{3}{9}$.

Преку поканата за набљудување на фигурите и белешките на работните листови и на училишната табла, како и преку сугестивни прашања, сакаме ученикот да ја открие врската (односот) меѓу броителот и именителот на еднакви дропки, како и правилата за тоа како може да добиеме нови дропки еднакви на дадената дропка. Потоа, ќе се направи обид ученикот да ги опише сите овие правила со зборови и писмено, но и да ги формализира.

Во однос на еднаквите дропки, ученикот или неговото разбирање е на највисоко ниво на разбирање според Теоријата Пирие-Киерен бидејќи тој ја создал и ја поседува идејата (сликата) за еднакви дропки, па сега треба да може да ги нагласи својствата на еднаквите дропки, формално да може да ги разјасни и да ги формализира во општа форма.

Преку други примери во почетната фаза, ученикот демонстрира дека умее да ги покаже и да ги верификува своите формални заклучоци со расудување и со докази, така што преку работа со нив докажува дека неговото разбирање е на ниво на структурирање според Пирие-Киерен во однос на поимот еднакви дропки.



Слика 79: Илустрација на поедноставување и на проширување дропки

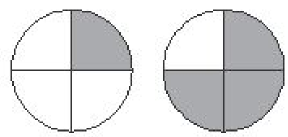
И така, сето ова прелиминарно знаење ни овозможува да преминеме на главниот дел од оваа наставна единица.

Од самиот почеток, преку два внимателно дизајнирани и илустрирани примери (лентата хартија и круговите), придружени со конкретни прашања и барања, сакавме ученикот да може да утврди меѓу две дропки со ист именител кога една дропка е поголема или помала од другата дропка. Ова го направивме земајќи ги предвид препораките на експертите за подучување и учење дропки, кои препорачуваат секогаш кога се работи за споредување дропки, репрезентативните модели да имаат ист облик и големина. На овој начин ученикот создава и истовремено ја поседува идејата (сликата) за споредување дропки со ист именител, а ние се обидуваме да го формализираме тоа барајќи од него усно или дури и писмено да изрази меѓу две дропки со ист именител кога едниот е поголем од другиот, а кога е помал од другиот.

$\frac{4}{7}$ претставува поголема големина од $\frac{2}{7}$, или $\frac{2}{7}$ претставува помала големина од $\frac{4}{7}$.

$$\frac{4}{7} > \frac{2}{7} \text{ ose } \frac{2}{7} < \frac{4}{7}$$

b.



$\frac{1}{4}$ $\frac{3}{4}$

a. $\frac{1}{4}$ претставува помала големина од $\frac{3}{4}$ или $\frac{3}{4}$ претставува поголема големина од $\frac{1}{4}$.

$$\frac{1}{4} < \frac{3}{4} \quad \text{или} \quad \frac{3}{4} > \frac{1}{4}$$

ЗОШТО?

Значи, тука имаме дропки со ист именител.

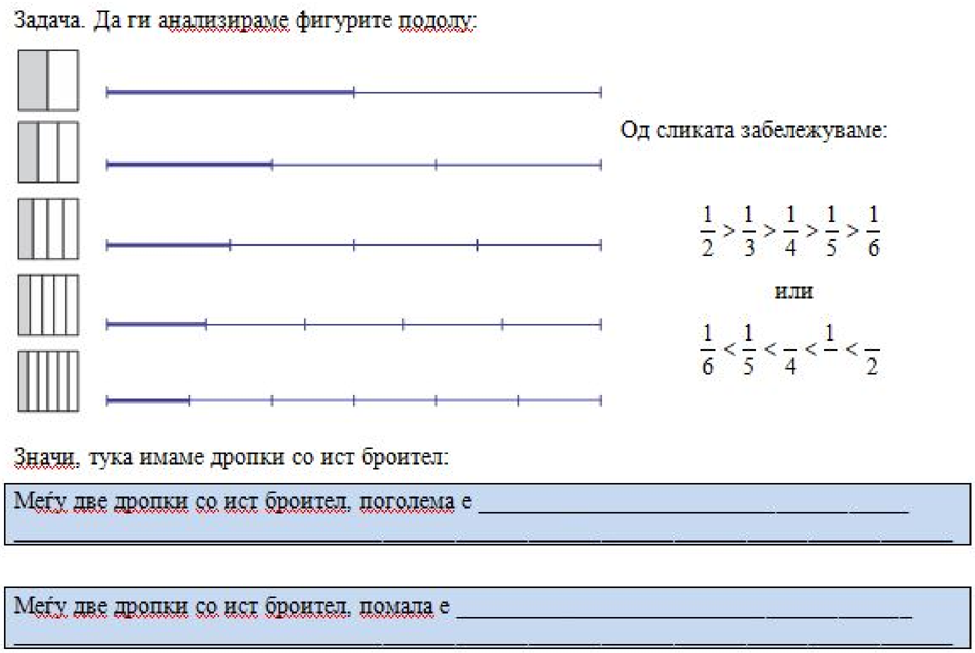
Меѓу две дропки со ист именител, поголема е ________________________________ ____

Меѓу две дропки со ист именител, помала е ___________________________________ ____

Слика 80: Споредување дропки со ист именител

Слично постапивме и во следниот пример, преку кој сакавме да го поттикнеме ученикот да разбере како се споредуваат две дропки со ист броител.

Во овој пример, намерно користевме други репрезентативни модели (правоаголник и отсечка) за да му понудиме на ученикот поглед на нивните претстави преку кои тој може да забележи и да утврди дека меѓу две дропки со ист броител, поголема е онаа што има најмал именител!? Што е доста проблематично и како такво може да предизвика забуна!

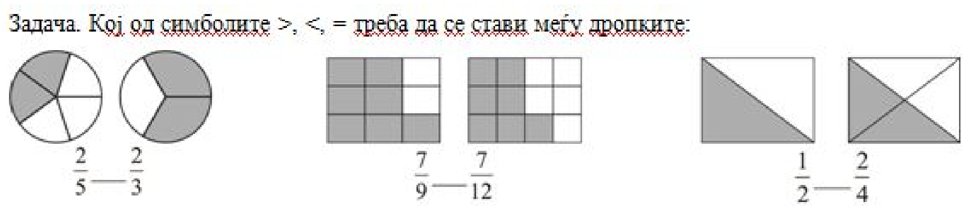


Слика 81: Споредување дропки со ист броител

Од студиите спроведени во земји со напредни образовни системи, видовме дека многу ученици од овие земји мислат дека меѓу две дропки со ист броител, поголема е таа со најголем именител. Тие го кажуваат ова и го мешаат со споредбата на природните броеви. Инаку, оваа појава е позната како „лажно верување“ дека знаат дропки, што повеќе е резултат на високо формализирани и шаблонски шеми при учењето на дропките и нивното споредување (Ciosek & Samborska, 2016). Затоа, имајќи го предвид овој факт, беше предизвик да се обидеме да дизајнираме задачи и барања кои го разјаснуваат проблемот на споредување дропки со ист броител.

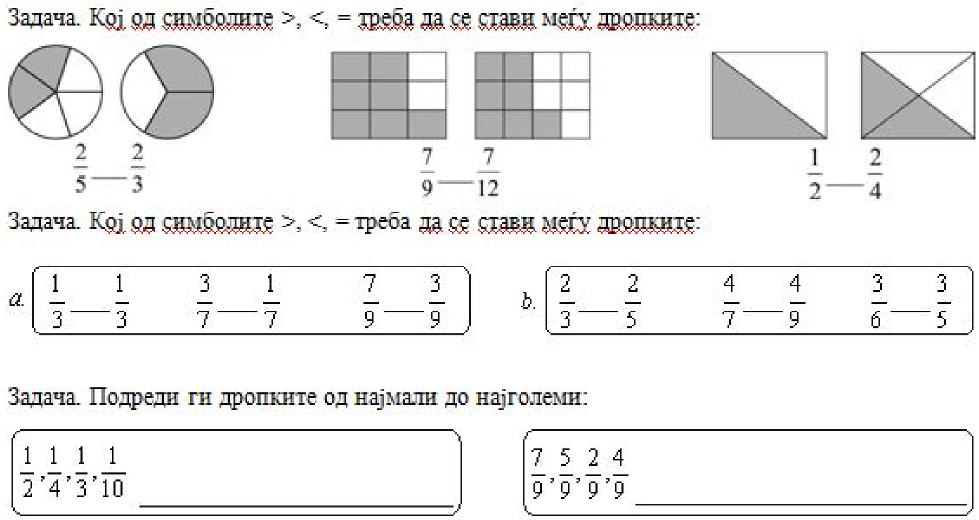
Дури и овој пример и употребените илустрации им овозможуваат на учениците усно или писмено да ги извлечат и да ги формулираат правилата за споредување дропки со ист броител, но и да ги формализираат.

Така, го развивме и го проширивме разбирањето на ученикот за споредбата на дропките со ист именител или броител до нивоата на нагласување својства и структурирање, бидејќи од формалните набљудувања на дропките со ист именител или броител, ученикот може да определи која од дадените дропки е поголема или помала од другата дропка.



Слика 82: Споредување дропки

И, за последниот дел од оваа наставна единица, изготвивме примери кои во некоја форма го синтетизираат сето она што е видено и кажано за споредување дропки со ист именител или броител. Преку овие примери, наставникот го проверува разбирањето на ученикот за да го консолидира и да го прошири неговото разбирање за споредување дропки со ист именител или броител. Овие примери овозможуваат и појава на проблеми и евентуално одложување во разбирањето на споредбата на дропките со цел нивно поправање.



Слика 83: Споредување дропки, определување по големина

Во последниот пример, од ученикот се очекува да ги исполни барањата во кои од него се бара да ги определи дропките според големината, од најмалата до најголемата (како дропки со ист именител или со ист броител). Овој пример ни нуди можност да го набљудуваме нивото на развој и проширување на разбирањето кај ученикот.

Овие очекувања ги темелиме врз фактот дека ученикот ги познава правилата за споредување дропки, било со ист именител или со ист броител, и дека веќе може да ги определи дропките по ред според нивната големина. На овој начин тој докажува дека го поседува формалното ниво на разбирање на „Создавањето“ според Теоријата Пирие-Киерен.

Анализа на писмените подготовки за наставниците и на работните листови за учениците за петтиот час во кој ја обработивме наставната единица **„Собирање и одземање дропки со ист именител“**.

За оваа наставна единица ги предвидовме следните резултати од учењето:

- Собира и одзема дропки со ист именител.
- Изразува правилно собирање и одземање дропки со ист именител.

Овие резултати од учењето за наставната единица придонесуваат за постигнување на исходите од учењето за темата „Дропки“, предвидени со Наставната програма за областа математика дизајнирана од MASHT-а:

- Врши операции со собирање и со одземање дропки со ист именител.

Уште во оваа писмена подготовка за наставникот и во работните листови за ученикот сакавме да го истакнеме фактот дека со дропките се испитуваат само случаите кога целината ја делиме на еднакви делови. За разлика од другите наставни единици, овде го повикавме ученикот да ги подели истите претставени фигури (правоаголници) на четири еднакви делови, но на различни начини.

Поделете и обојте на два различни начини $\frac{1}{4}$ на правоаголникот.

Слика 84: Ученикот дели и бои ¼ од двата дадени правоаголници на различни начини

Сите примери во воведниот дел од оваа наставна единица се дизајнирани на таков начин што да дадат кратко и ефективно резиме на сите најважни концепти за дропките опфатени во овие писмени подготовки за наставниците и во работните листови за учениците.

Овие задачи вклучуваат: пресметување на делот од целината (бројот) што го претставува дропката; добивање на други дропки еднакви на дадената дропка, преку дејство на проширување и на поедноставување на дропките; споредување дропки со ист именител или броител и нивно определување во серија од најмал до најголем или обратно; наоѓање на дропката што ја комплетира целината. Процесот на нивно решавање ни дава проширен увид во нивото на разбирање на сите овие содржини за дропките, а воедно ги изнесуваат на виделина недостатоците и евентуалните доцнења во нивното разбирање од страна на учениците, со цел нивно поправање.

Задача. Колку претставуваат (пресметај):

$\frac{2}{3}$ од 9 = ______; $\frac{3}{5}$ од 20 = ______; $\frac{7}{10}$ од 30 = ______

Задача. Изедначете ги дропките:

$\frac{1}{7}=\frac{1\cdot 3}{7\cdot}=-$ $\frac{4}{10}=\frac{4:2}{10:}=-$ $\frac{1}{5}=\frac{}{10}$

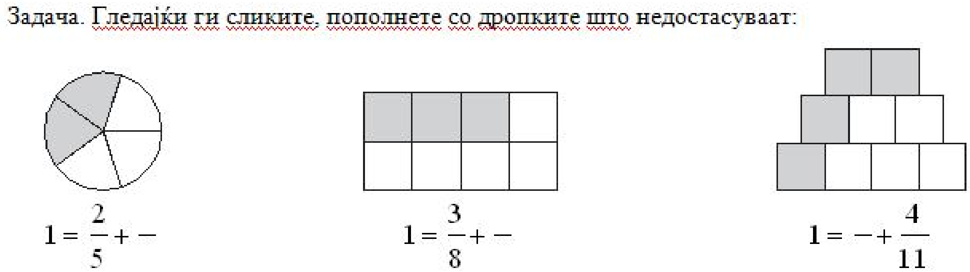
$\frac{1}{7}=\frac{1\cdot}{7\cdot 4}=-$ $\frac{6}{21}=\frac{6:}{21:3}=-$ $\frac{15}{20}=\frac{3}{}$

Задача. Поставете еден од симболите: >, <, = меѓу дропките:

$\frac{6}{7}$ ___ $\frac{5}{7}$ $\frac{2}{11}$ ___ $\frac{6}{11}$ $\frac{7}{10}$ ___ $\frac{7}{8}$ $\frac{1}{29}$ ___ $\frac{1}{25}$

Слика 85: Разни задачи поврзани со пресметување на дел од целина (број), задачи поврзани со еднакви дропки и нивна споредба

Сите овие претходни знаења се многу неопходни за преминување кон главниот дел од оваа наставна единица.



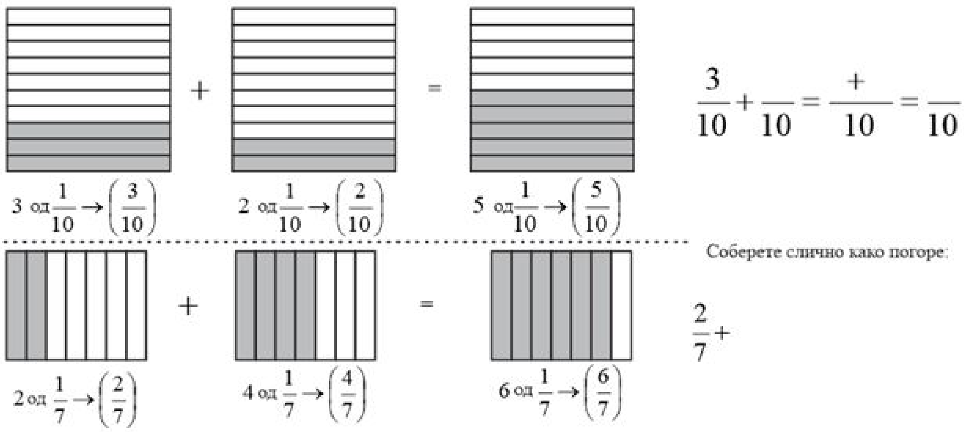
Слика 86: Комплетирање на една целина

Во главниот дел од оваа наставна единица, преку два различни примери со соодветни илустрации, сакавме да го визуализираме дејството на собирање дропки со ист именител.

Набљудувајќи ги илустрациите, како и одговорите на ученикот на конкретните прашања и барања усно или дури и писмено (од работните листови за ученикот), ученикот почнува да ги создава и да ги совладува менталните слики поврзани со собирањето дропки со исти именители.

Потоа се бара од ученикот да ги опише и да ги формулира своите мисли и идеи во врска со оваа акција. Водејќи го, наставникот може да го формализира неговото разбирање со усно или писмено искажување за процесот на извршување на дејството на собирање дропки со ист именител.

Задача. Да ги видиме фигурите:



Овде имаме собирање дропки со ист именител.

Како да се соберат дропки со ист именител?

Дропките со ист именител се собираат вака: ______________________________

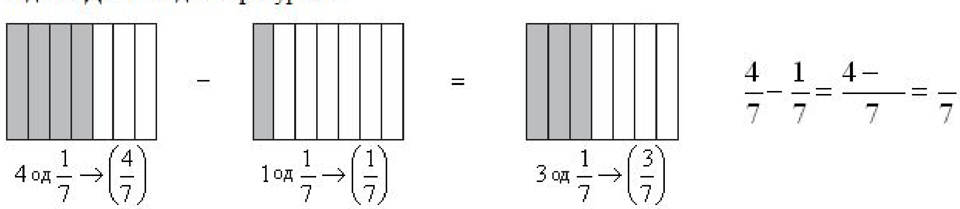
____

Слика 87: Илустрација на собирање дропки со ист именител

Слично постапивме и со одземање дропки со ист именител. Со набљудување на илустрацијата, како и со одговарање на прашањата и конкретните барања, ученикот почнува да создава и да совладува ментални слики за процесот на извршување на операцијата одземање дропки со ист именител.

И во овој случај, ученикот може да ги опише идеите и постапките за извршување на оваа акција, изразувајќи се усно или писмено, а потоа да ги формализира.

Задача. Да ги видиме фигурите:



Овде одземаме дропки со ист именител.

Како се одземаат дропки со ист именител?

Дропките со ист именител се одземаат вака: ______________________________

____

Слика 88: Илустрација на одземање дропки со ист именител

Откако ученикот во својот ум ги создал и ги совладал идеите (сликите) за операциите собирање и одземање дропки со ист именител, а со цел да се најдат заедничките и посебните својства за овие две аритметички операции, како и поврзувањето на овие две посредни дејства, за завршниот дел од часот подготвивме посебни работни листови за ученикот.

При решавањето на овие задачи, ученикот докажува дека откако ги формализирал операциите собирање и одземање дропки со ист именител, сега самостојно или со поддршка на наставникот може да ги изврши операциите собирање и одземање дропки со ист именител. На овој начин, тој мора да докаже дека неговото разбирање му припаѓа на формалното ниво „Структурирање“ според Теоријата Пирие-Киерен.

Последната задача содржи изрази со собирање и одземање дропки со ист именител. Значи, тој наидува на изрази кои бараат од него истовремено да ги применува формалните правила на собирање и одземање дропки со ист именител, држејќи го своето разбирање надвор од сегашната структура, принудувајќи го да воспостави врски меѓу овие две дејства и формалните правила. Така, неговото разбирање е развиено и широко проширено до последното формално ниво на разбирање според Теоријата Пирие-Киерен „Создавање“.

Задача. Собери дропки со ист именител:

$\frac{3}{5}+\frac{1}{5}=\frac{3+1}{4}=\frac{\quad}{\quad}$ $\qquad$ $\frac{2}{9}+\frac{4}{9}=\frac{2+\quad}{9}=\frac{\quad}{\quad}$

$\frac{3}{10}+\frac{4}{10}=\frac{\qquad}{10}=\frac{\quad}{\quad}$ $\qquad$ $\frac{3}{7}+\frac{1}{7}+\frac{2}{7}=$

Задача. Изведете ги бараните операции со дропки:

$\frac{5}{11}-\frac{2}{11}=\frac{5-\quad}{11}=\frac{\quad}{\quad}$ $\qquad$ $\frac{13}{15}-\frac{8}{15}=\frac{\qquad}{15}=\frac{\quad}{\quad}$

$\frac{9}{10}-\frac{7}{10}+\frac{1}{10}=\frac{9-7+1}{\qquad}=\frac{\quad}{\quad}$ $\qquad$ $\frac{13}{23}-\frac{5}{23}-\frac{9}{23}=$

Слика 89: Задачи за вежби поврзани со собирање и одземање дропки со ист именител

3.2.3.3. Анализа на наставни часови во согласност со Теоријата Пирие-Киерен за V одделение

Како што рековме погоре, за V одделение изготвивме писмени подготовки за наставникот и работни листови за ученикот за вкупно 4 наставни единици, кои ќе се изведуваат во експерименталните часови вклучени во истражувањето.

Анализа на писмените подготовки за наставниците и на работните листови за учениците за првиот час во кој ја обработивме наставната единица **„Дропки и нивното значење“**.

За оваа наставна единица ги предвидовме следните резултати од учењето:

- Различни графички прикази, со конкретни материјали, со зборови и со симболи се претставени како дропки и обратно.

- Го објаснува значењето на броителот и на именителот.

- Определува и пресметува дел од целина или од број.

Овие резултати од учењето за наставната единица придонесуваат за постигнување на исходите од учењето за темата „Дропки", предвидени со Наставната програма за областа математика дизајнирана од MASHT-a:

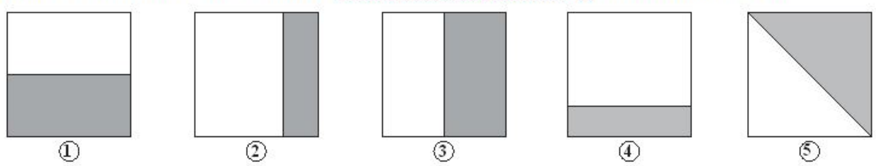
- Претставува графички прикази како дропки и обратно.

- Определува дел од целина или од број.

Бидејќи ова е прва наставна единица во која се третираат дропки за петто одделение, се погриживме да ги формулираме и да ги илустрираме примерите за да бидат што поразбирливи.

Во првиот пример од воведниот дел, презентиравме 5 квадрати со иста форма и големина, каде што секој од нив е поделен на два еднакви дела.

Погледнете ги внимателно сликите. Што може да кажеме за нивната поделба?



Како се поделени фигурите? ____

____

Како се поделени фигурите 1, 3 и 5? ______________________________________

А фигурите 2 и 4? ____

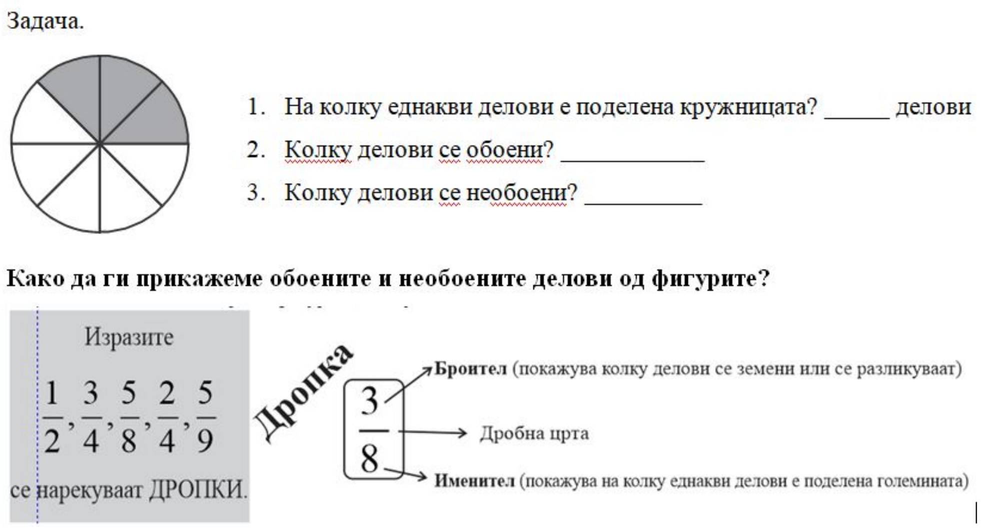
Слика 90: Извлекување на значењето на дропката и на нејзините елементи. Нагласување на фактот дека кај дропките се разгледуваат само случаите кога имаме поделба на големината на еднакви делови

Преку прашањата и конкретните барања на работниот лист, го поттикнуваме ученикот да забележи дека сите квадрати се поделени на два дела, но некои од нив се поделени на еднакви делови, а некои се поделени на два нееднакви дела.

За да се нагласи фактот дека во дропките се разгледуваат само случаите кога целините се делат на еднакви делови, преку вториот пример го повикуваме ученикот да ги подели четирите дадени фигури (различни една од друга) на онолку еднакви делови колку што се бара под секоја од нив.

Слика 91: Ученикот ја дели секоја фигура на онолку еднакви делови колку што се бара

Во следниот пример зедовме круг кој е поделен на 8 еднакви дела од кои 3 се обоени. Преку сугестивни прашања го поттикнуваме ученикот да набљудува и да размислува за тоа како е поделен кругот, колку од овие делови се обоени, а колку делови се необоени.

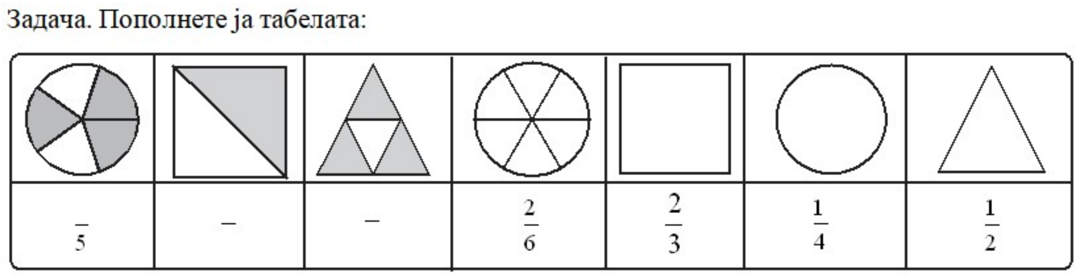


Слика 92: Илустрација на изведувањето на дефиницијата за дропка и за нејзините елементи

Потоа, за да го поттикне ученикот да најде начини за бележење на бројот на обоени и на необоени делови во однос на целата слика, наставникот презентира и појаснува дека најдобар начин е преку записите $\frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}$, кои се нарекуваат дропки. Истовремено, ученикот се поттикнува да именува и да го дефинира значењето на елементите на дропката (именителот и броителот).

Сето ова елементарно знаење за дропките ни овозможува да навлеземе во главниот дел од наставната единица.

Во првиот пример од овој дел, го повикуваме ученикот да ги набљудува графичките прикази, барајќи од него да ги изрази обоените делови преку дропки и обратно, да обои онолку делови од фигурите колку што бараат соодветните дропки.



Слика 93: Ученикот ги означува дропката и нејзините соодветни елементи кои го прикажуваат обоениот дел од фигурите и обратно, дели и обојува онолку делови од фигурите колку што покажуваат соодветните дропки

На овој начин ученикот докажува дека ја создал и ја поседува идејата (сликата) за дропките.

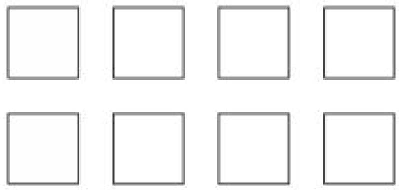
Во следниот пример илустриран со слики од различни контексти, бараме од ученикот да разликува и да обои онолку од нивните делови колку што бараат соодветните дропки.

Слика 94: Ученикот разликува и бои онолку делови од фигурите и големини колку што покажуваат соодветните дропки

Пред да започне да работи на решението на овој пример, ученикот почнува да манипулира со фрагментите од аспектите на сликите изградени во неговата свест за да ги исполни новите барања поставени пред него. Докажува и дека ги разбира улогата и значењето на елементите на дропката и со тоа неговото разбирање му припаѓа на формалното ниво на разбирање „Нагласување на својствата“ според Теоријата Пирие-Киерен.

Имајќи ги предвид способностите на ученикот дека сега може да ги апстрахира заедничките квалитети од претходното разбирање, како и фактот дека петтоодделенецот поседува добри вештини во аритметиката на природните броеви, преку следните два примери го повикуваме ученикот да разликува и да бои ¼ од вкупно 8 квадрати, а во другиот случај 2/3 од вкупно 15 ѕвезди. Во овој случај, на дропките им дадовме квантитативен карактер како една од препораките што ги истакнавме претходно. Работејќи со овие два примери, ученикот докажува дека сега умее да формализира многу аспекти на дропките, генерализирајќи ги, и обратно умее да ги примени општите формализирања во обид да одговори на барањата на задачите. Значи, може да кажеме дека сега разбирањето на ученикот му припаѓа на формалните нивоа на разбирање „Формализација“ и „Нагласување на својствата“ според Теоријата Пирие-Киерен.

Задача. Разликувајте или обојте $\frac{1}{4}$ од 8 квадрати на сликата:



$\frac{1}{4}$ од 8 квадрати = __________ квадрати.

Објаснете ги пресметките ________________________

____

Задача. Задача. Разликувајте и обојте $\frac{2}{3}$ од ѕвездите на сликата:

$\frac{2}{3}$ од 15 ѕвезди = __________ ѕвезди.

Објаснете ги пресметките: _______________

____

Слика 95: Ученикот покажува онолку делови со различни големини колку што покажуваат соодветните дропки, давајќи објаснувања и правејќи ги соодветните пресметки

Откако работевме со различни аспекти на разбирањето дропки, илустрирајќи ги и прикажувајќи ги во различни форми и начини од различни контексти, како и сметајќи на добрите пресметковни вештини на ученикот, последните два примери ги дизајниравме во насока на подлабоко размислување. За таа цел зедовме примери од секојдневни контексти, како пари и страници од книга.

Задача. Линдрит има 35 евра од кои потрошил $\frac{4}{7}$. Колку € има непотрошено Линдрит?

Пресметај:

Линдрит потрошил $\frac{4}{7}$ од 35 € =_____________ €

На Линдрит му останаа уште _____________€

Задача. Ринеса чита книга од 150 страници. Досега прочитала $\frac{7}{10}$ од книгата. Уште колку страници треба да прочита?

Пресметај:

Ринеса прочитала $\frac{7}{10}$ од 150 стр. = ____________.

Ринеса треба да прочита уште ____ страна.

Слика 96: Примена на дропките во секојдневните животни проблеми

Под водство на наставникот, ученикот ќе ги забележи практичните аспекти на употребата на дропките и на тој начин го поседува највисокото ниво на разбирање „Создавање“ според Теоријата Пирие-Киерен.

Анализа на писмените подготовки за наставниците и на работните листови за учениците за вториот час во кој ја обработивме наставната единица **„Споредба на дропки со ист именител или броител“**.

За оваа наставна единица ги составивме следните резултати од учењето:

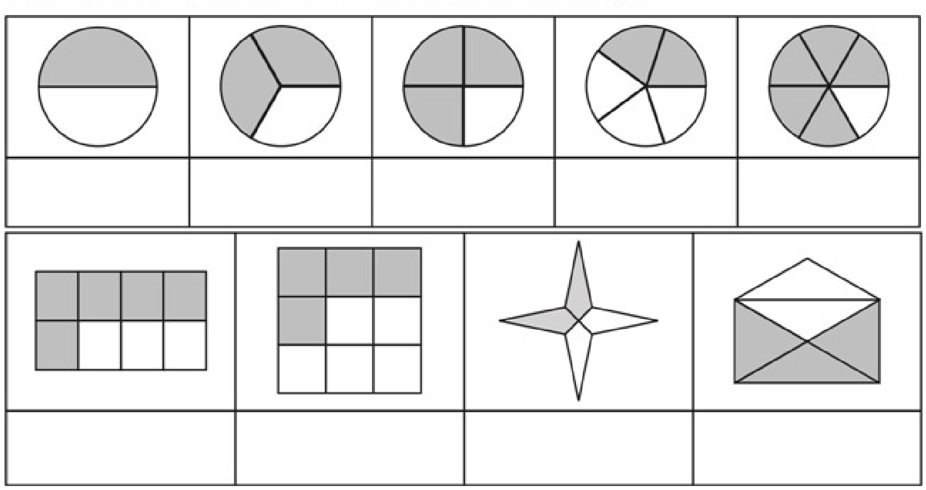
- Споредува дропки со ист именител или броител.
- Формира дропки еднакви на дадената дропка со нивно проширување или поедноставување.
- Ги искажува и ги применува правилата за споредување дропки.

Овие резултати од учењето за наставната единица придонесуваат за постигнување на исходите од учењето за темата „Дропки“, предвидени со Наставната програма за областа математика дизајнирана од MASHT-а:

- Споредува дропки со ист именител или броител.
- Формира дропки еднакви на дадената дропка со нејзино проширување или поедноставување.

И овде, во воведниот дел на оваа наставна единица, како и во првиот пример, сакавме да го истакнеме фактот дека во дропките се разгледуваат само случаите кога се работи за поделба на целината на еднакви делови. Преку различни графички прикази, како што се кругови, правоаголници и други фигури поврзани со специфични барања, ученикот ги изразува со дропки деловите од фигурите обоени или издвоени на некој друг начин.

Претстави ги со помош на дропки обоените делови од фигурите?



Слика 97: Ученикот ги претставува обоените делови од сликите со дропки

За да го зајакнеме и да го прошириме елементарното разбирање на дропките, преку следните примери од воведниот дел од оваа наставна единица, создадовме проблемски ситуации со големини од секојдневниот живот (бонбони, должина, тежина, пари, време), при што треба да пресметаме определени делови од нив колку што покажуваат соодветните дропки. Со ова сакавме да го развиеме квантитативното разбирање на дропките кај учениците од V одделение како една од најважните препораки на експертите за учење дропки.

Задача. Во пакувањето има 20 бонбони од кои $\frac{2}{5}$ ѝ дадов на другарка ми. Можеш ли да ми кажеш уште колку бонбони има во пакувањето?

На мојата другарка ѝ дадов $\frac{2}{5}$ од 20 бонбони = __________ бонбони.

Ми останаа уште 20 бонбони - ____________ = ________________бонбони.

Задача. Пресметај:

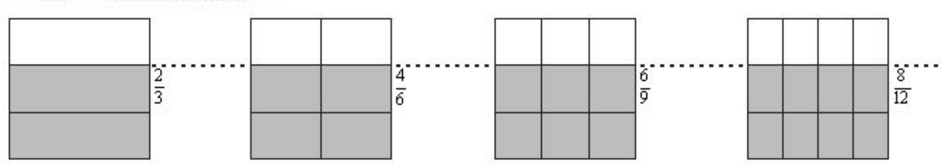
$\frac{1}{10}$ од 1 м =______ цм $\frac{5}{12}$ од 1 часа =_______ мин. $\frac{3}{5}$ од 1 kg =_______ g

$\frac{9}{20}$ од 1 евро =_______ центи $\frac{3}{4}$ од 1 год. =_____ месеци $\frac{2}{7}$ од 1 нед. =___ дена

Слика 98: Примери за примена на дропки во секојдневните животни проблеми

Во главниот дел од оваа наставна единица, во првиот илустриран пример од овој дел, имавме за цел да покажеме дека големината може да се подели на различни форми и начини, кои се претставени со навидум различни дропки, но кои, всушност, претставуваат (покажуваат) иста големина – еднакви дропки, за кои зборувавме во последната наставна единица.

Задача. Да ги видиме сликите:



Што забележуваме овде? ____

____

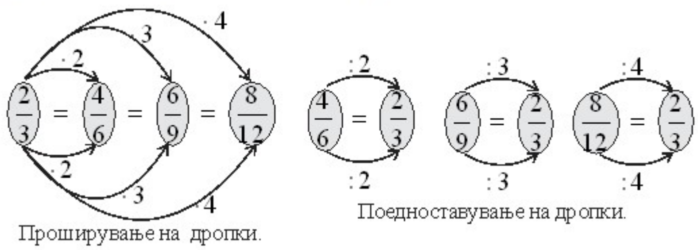
Слика 99: Илустрација на еднакви дропки

Потоа го поттикнавме ученикот длабински да ги анализира еднаквите дропки, соодветно за дејствата со кои тие се добиваат (проширување и поедноставување на дропките). Со помош на релевантни илустрации и конкретни прашања, како и набљудувања и дискусии, ученикот почнува да дава свои формализирани размислувања за еднаквите дропки, усно или писмено. Потоа продолжуваме со следниот пример во кој ученикот почнува да манипулира со своите формални идеи за наоѓање и за означување на броителите или на именителите што недостасуваат за да добие други еднакви дропки.

Значи, дропки $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{6}$, $\frac{6}{9}$, $\frac{8}{12}$ претставуваат ист дел од големината.

$$\frac{2}{3}=\frac{4}{6}=\frac{6}{9}=\frac{8}{12}$$

Како да се добијат еднакви дропки на дадена дропка?



Што подразбираме под **проширување** на дропка? ____________________________________
____

Што подразбираме под поедноставување на дропка? ________________________________
____

Слика 100: Илустрација на операциите проширување и поедноставување на дропки

За да го олесниме разбирањето на ученикот за споредување дропки со ист именител или броител, за илустрации користевме фигури и предмети со иста големина и облик што, всушност, е една од најважните препораки на експертите. Илустрациите се такви што ученикот лесно може да ја разбере споредбата на дропките со ист именител или броител. Потоа очекуваме ученикот да ги формализира истите значења и да ги изрази усно или писмено. На овој начин, тој докажува дека неговото разбирање за споредување дропки со ист именител или броител е развиено и проширено на формалните нивоа на разбирање „Формализација“, „Набљудување“ и „Нагласување на својствата“ според Теоријата Пирие-Киерен. Наставникот треба да го забележи ова при работата на ученикот со соодветните примери и во текот на дискусиите што ги покренуваат и учениците и наставникот, како и преку прашањата и одговорите што се поставени на работните листови или што се појавуваат на лице место.

Задача. Најдете ги броителот и именителот на дропките што недостасува:

$\frac{4}{5}=\frac{\_\_}{10}$ $\quad$ $\frac{1}{2}=\frac{4}{\_\_}$ $\quad$ $\frac{2}{3}=\frac{\_\_}{15}$ $\quad$ $\frac{9}{12}=\frac{3}{\_\_}$ $\quad$ $\frac{6}{9}=\frac{\_\_}{3}$ $\quad$ $\frac{10}{12}=\frac{5}{\_\_}$

Слика 101: Задачи поврзани со еднакви дропки (проширување и поедноставување на дропки)

За дополнително да се зголеми разбирањето на учениците за споредување дропки, следните примери им даваат можност на учениците да ги формализираат сите тие идеи, мисли и слики создадени во нивните умови за споредување на дропките во различни форми, при што тие расудуваат и проверуваат со докази и со конкретно расудување.

Така, тие докажуваат дека нивното разбирање се проширило на формалното ниво на разбирањето „Структурирање“ според Теоријата Пирие-Киерен.

Задача. Да ги погледнеме дропките што ги прикажуваат обоените делови на фигурите:

Што имаат заедничко дропките: $\frac{4}{7}$ и $\frac{2}{7}$? ____

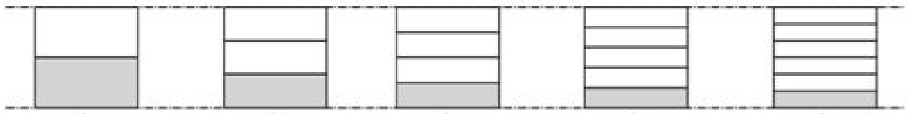
$\frac{4}{7}$ претставува големина поголема од $\frac{2}{7}$. Значи, $\frac{4}{7} > \frac{2}{7}$.

$\frac{2}{7}$ претставува големина помала од $\frac{4}{7}$. Значи, $\frac{2}{7} < \frac{4}{7}$.

Слика 102: Споредување дропки со ист именител

И на самиот крај, последниот пример му дава можност на ученикот да ги искористи сите тие навики и слики стекнати и формализирани во однос на споредувањето на дропките со ист именител или броител, да извлече нови заклучоци и значења, како на пример, како се определени дропките во низата (зголемувачки или намалувачки) дропки со ист именител или броител. Така, ученикот докажува дека неговото разбирање го фатило последното формално ниво на разбирање „Создавање“ според Теоријата Пирие-Киерен.

Задача. Да ги погледнеме дропките што ги прикажуваат обоените делови на фигурите:



$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{6}$

Што имаат заедничко овие дропки $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}$? ______________________________

$\frac{1}{2}$ претставува големина поголема од $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{3}$ претставува големина помала од $\frac{1}{4}$; .....

или:

$\frac{1}{6}$ претставува големина помала од $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{5}$ претставува големина помала од $\frac{1}{4}$; .....

Значи, $\boxed{\frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \frac{1}{5} > \frac{1}{6}}$ или $\boxed{\frac{1}{6} < \frac{1}{5} < \frac{1}{4} < \frac{1}{3} < \frac{1}{2}}$

Задача. Поставете еден од симболите >, <, = меѓу дропки:

a. $\boxed{\frac{1}{3} \_\_ \frac{1}{3} \quad \frac{3}{7} \_\_ \frac{1}{7} \quad \frac{7}{9} \_\_ \frac{5}{9}}$ *b.* $\boxed{\frac{2}{3} \_\_ \frac{2}{5} \quad \frac{4}{7} \_\_ \frac{4}{9} \quad \frac{3}{6} \_\_ \frac{3}{5}}$

Задача. Подреди ги дропките од најмала до најголема:

$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{10}$ ____________________; $\frac{7}{9}, \frac{5}{9}, \frac{2}{9}, \frac{4}{9}$ ____________________

Слика 103: Споредување дропки со ист броител

Анализа на писмените подготовки за наставниците и на работните листови за учениците за третиот час во кој ја обработивме наставната единица **„Собирање и одземање дропки со ист именител“.**

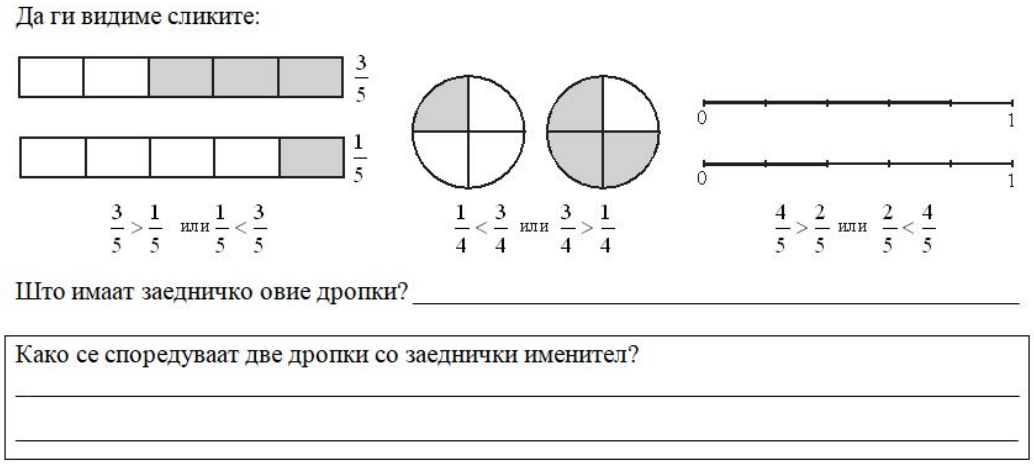
За оваа наставна единица ги составивме следните резултати од учењето:

- Собира и одзема дропки со ист именител.
- Илустрира со цртежи собирање и одземање дропки со ист именител.

Овие резултати од учењето за наставната единица придонесуваат за постигнување на исходите од учењето за темата „Дропки“, предвидени со Наставната програма за областа математика дизајнирана од MASHT-а:

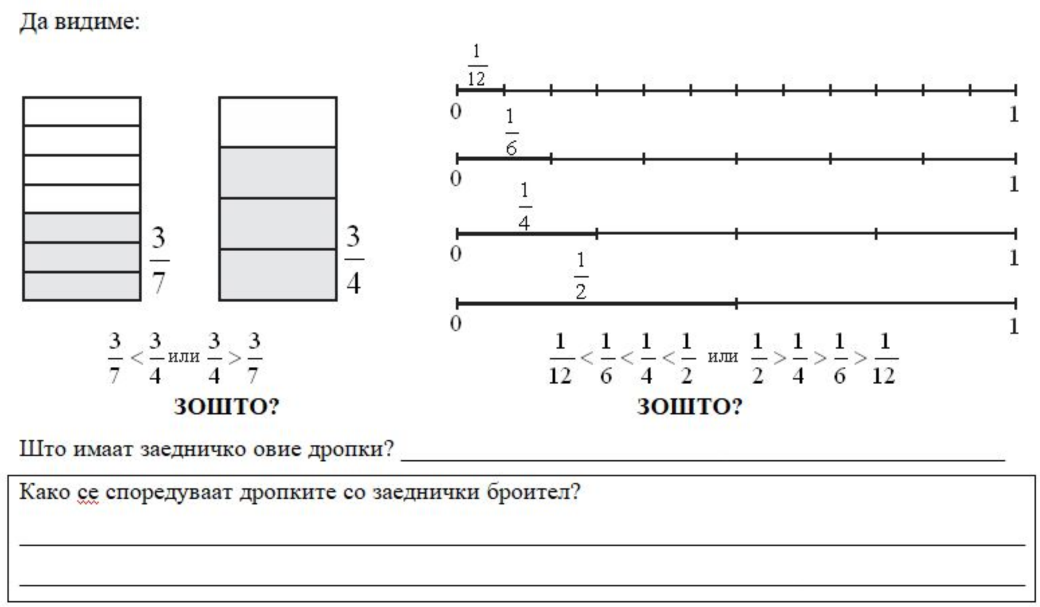
- Собира и одзема дропки со ист именител.

Во воведниот дел од оваа наставна единица дизајниравме серија примери илустрирани со слики, предмети и големини со различни форми, преку кои ученикот го манифестира нивото на своето разбирање за споредување дропки со ист именител или броител.



Слика 104: Споредување дропки со ист именител

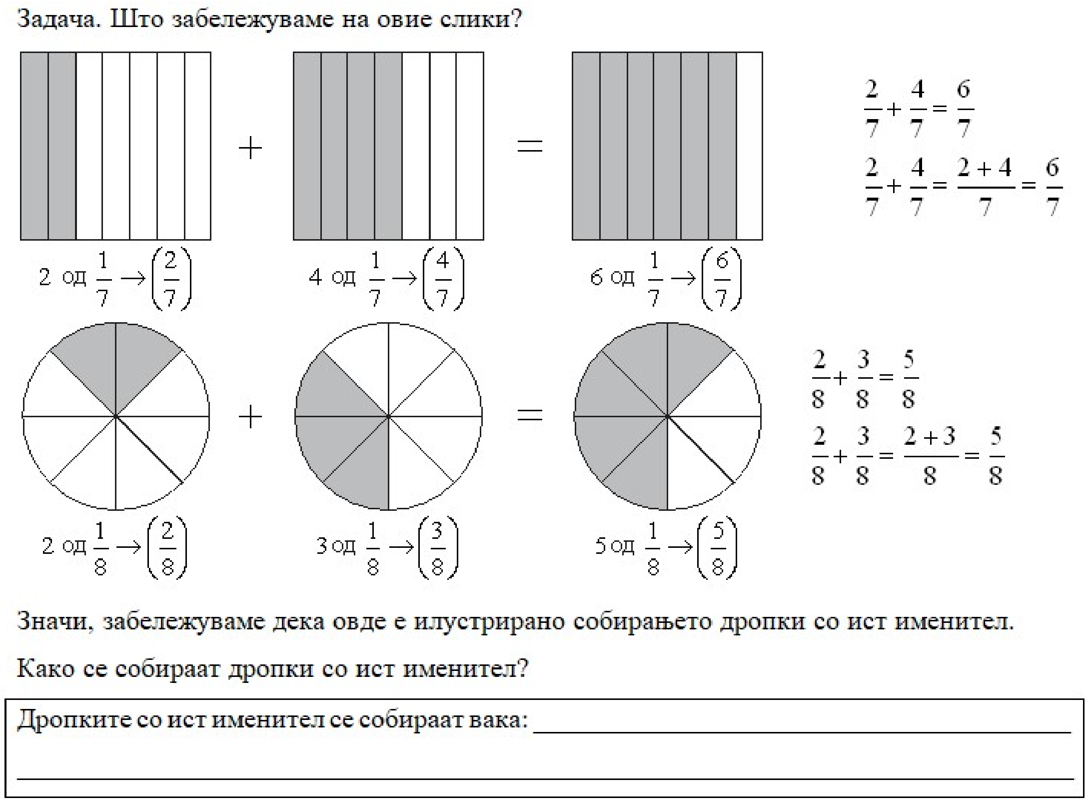
За секој случај и барање користевме илустрации со големини и фигури со иста форма и големина. Примерите се дизајнирани така што ученикот може да го манифестира нивото на своето разбирање во однос на споредбата на дропките и во исто време да ги манифестира недостатоците и евентуалните недостатоци во своето разбирање за споредбата на дропките, со цел нивно подобрување.



Слика 105: Споредување дропки со ист броител

Овие и други претходни знаења за дропките може да се сметаат како претходно знаење (примитивно знаење) што ни овозможува да продолжиме со главниот дел од наставната единица.

Преку релевантни илустрации, како и врз основа на дефиницијата за дропка како дел од целина, со истиот пристап се обидовме да го илустрираме и да го разјасниме дејството на собирање дропки со ист именител. Значи, го илустриравме собирањето на две дропки со ист именител како додавање на определено множество (број) делови со иста форма и големина, на множеството (број) на други делови кои исто така имаат иста форма и големина, но од иста целина или фигура.

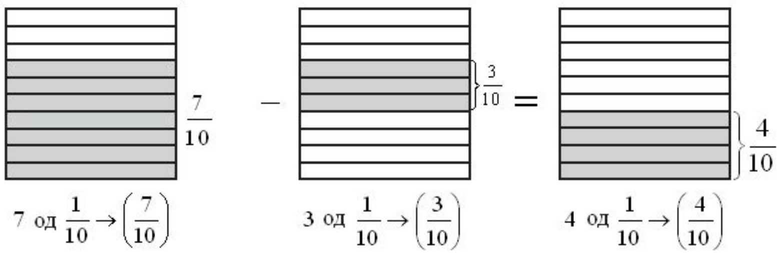


Слика 106: Собирање дропки со ист именител

Преку овие илустрации, ученикот почнува да гради и да совладува слики за собирање дропки со ист именител. Овие два примери погоре му овозможуваат на ученикот да започне да го опишува процесот на собирање дропки со ист именител и да го формализира во исто време.

Слично постапивме и со одземање дропки со ист именител. И овде се засноваме врз дефиницијата за дропка како дел од целината. Значи, одземањето на две дропки со ист именител го илустрираме како земање (отстранување) множество (број) делови со иста големина и форма од множество (број) делови исто така со иста големина и форма.

Задача. Што забележуваме на сликата:



$$\frac{7}{10} - \frac{3}{10} = \frac{4}{10}$$

$$\frac{7}{10} - \frac{3}{10} = \frac{7-3}{10} = \frac{4}{10}$$

Значи, забележуваме дека овде имаме одземање дропки со ист именител.

Како се одземаат дропки со ист именител?

Дропките со ист именител се одземаат вака: ______________________________________

____

Слика 107: Одземање дропки со ист именител

И овде од илустрациите ученикот почнува да ги гради и да ги совладува сликите на одземање дропки со ист именител. Добро осмислените и илустрирани примери, придружени со дискусии и со конкретни барања од наставникот, го тераат ученикот да почне да го опишува процесот на извршување на операцијата одземање дропки со ист именител, опишувајќи ги и нагласувајќи ги својствата на извршување на операцијата одземање, како и формулирање на формални правила.

Значи, ученикот сега треба да може да го формализира и процесот на собирање и процесот на одземање дропки со ист именител, усно или писмено. За ова, тој е поттикнат од конкретни прашања поставени во работните листови. Со други зборови, тој покажува високи нивоа на разбирање според Теоријата Пирие-Киерен.

Потоа во завршниот дел од наставната единица, преку следните примери, сакавме да го развиеме и да го прошириме нивното разбирање за собирање и одземање дропки со ист именител на највисоко можно ниво.

Задача за вежбање. Соберете ги и одземете ги дропките со истите именители дадени подолу:

$\frac{3}{5}+\frac{1}{5}=\frac{3+1}{5}=-$ $\qquad$ $\frac{2}{9}+\frac{4}{9}=\frac{2+}{9}=-$

$\frac{3}{10}+\frac{4}{10}=\underline{\qquad\quad}=-$ $\qquad$ $\frac{7}{13}+\frac{1}{13}=\underline{\qquad\quad}=-$

$\frac{2}{9}+\frac{5}{9}=\frac{2+}{\qquad\quad}=-$ $\qquad$ $\frac{9}{17}-\frac{4}{17}=\underline{\qquad\quad}=-$

$\frac{3}{7}+\frac{1}{7}+\frac{2}{7}=\underline{\qquad\qquad}=-$ $\qquad$ $\frac{1}{16}+\frac{2}{16}+\frac{5}{16}+\frac{3}{16}=\underline{\qquad\qquad\qquad}=-$

$\frac{11}{25}-\frac{9}{25}+\frac{4}{25}=\underline{\qquad\qquad}=-$

Задача. Одземете ги дропките со ист именител:

$\frac{5}{10}-\frac{2}{10}=\frac{5-2}{10}=-$ $\qquad$ $\frac{13}{15}-\frac{8}{15}=\frac{13-}{15}=-$

$\frac{9}{17}-\frac{4}{17}=\underline{\qquad\quad}=-$ $\qquad$ $\frac{13}{20}-\frac{9}{20}=\underline{\qquad\quad}=-$

$\frac{9}{10}-\frac{7}{10}+\frac{1}{10}=\frac{9-7+1}{\qquad}=-$ $\qquad$ $\frac{17}{20}-\frac{7}{20}+\frac{3}{20}=\underline{\qquad\quad}=-$

Слика 108: Задачата се однесува на собирање и одземање дропки со ист именител

Преку првите примери од оваа фаза сакавме учениците да можат сите тие идеи и слики, создадени и формализирани, да ги расудуваат и да ги проверат преку расудување и докази. И така, нивното разбирање се протега на претпоследното формално ниво на разбирање „Структурирање“ според Теоријата Пирие-Киерен.

Преку последниот пример, каде што направивме комбинации на дејството на собирање и на одземање дропки, сакавме учениците да можат да ги спојат сите знаења, слики и концепти што досега ги изградиле за собирањето и за одземањето дропки со ист именител, па тие да се однесуваат на други посложени изрази кои содржат собирање и одземање на две, три или повеќе дропки со ист именител. Така, разбирањето на учениците за собирање и одземање дропки со ист именител ќе може да се развие и да се прошири до последното ниво на разбирање „Создавање“ според Теоријата Пирие-Киерен.

Анализа на писмените подготовки за наставниците и на работните листови за учениците за четвртиот час во кој ја обработивме наставната единица **„Собирање и одземање дропки со различни именители“**.

За оваа наставна единица ги составивме следните резултати од учењето:

- Претвора дропки со различни именители во дропки со ист именител.

- Собира и одзема дропки со различни именители.

Овие резултати од учењето за наставната единица придонесуваат за постигнување на исходите од учењето за темата „Дропки“, предвидени со Наставната програма за областа математика дизајнирана од MASHT-а:

- Собира и одзема дропки со различни именители со тоа што ги претвора во дропки со ист именител.

Оваа наставна единица е малку поконкретна бидејќи за да собираме или за да одземаме дропки со различни именители, прво треба да ги претвориме во дропки со ист именител што, всушност, е заедничкиот множител на именителот на дадените дропки (НЗС). Од Наставната програма и од прелиминарните консултации со наставниците од V одделение, разбравме дека учениците претходно се запознаени со поимот множители, поточно најмал заеднички множител; затоа во воведниот дел од оваа наставна единица ќе престанеме да го истакнуваме претходното знаење на учениците за оваа проблематика.

Преку пример се потсетивме на целиот процес на пронаоѓање на НЗС, поконкретно ги зедовме броевите 4 и 6, за кои го најдовме НЗС (4, 6) = 12.

Задача. Да ги погледнеме броевите 4 и 6.

Множители на 4 и 6 се:

$M_4 = \{4, 8, 12, \_\_\_, \_\_\_, \_\_\_, \_\_\_, \_\_\_, \_\_\_, \_\_\_, \_\_\_, \ldots\}$

$M_6 = \{6, 12, 18, \_\_\_, \_\_\_, \_\_\_, \_\_\_, \_\_\_, \_\_\_, \_\_\_, \_\_\_, \ldots\}$

Заедничките множители на броевите 4 и 6 се:

$M_{(4,6)} = \{12, 24, 36, \_\_\_, \_\_\_, \_\_\_, \_\_\_, \_\_\_, \_\_\_, \ldots\}$

Најмалиот од нив е 12 што го нарекуваме најмал заеднички содржател на 4 и 6.

Означувамо: $НЗС(4,6) = 12$

НЗС од два или повеќе броеви ќе го користиме при наоѓање заеднички именител на дропки со различни именители.

Слика 109: Процесот на наоѓање НЗС (најмал заеднички содржател) на два броја

Следниве примери се направени на тој начин што ученикот ги создава и ги разбира значењето и постапката за наоѓање заеднички именител на дропките со различни именители, а со тоа и ги претвора во дропки со ист именител. Овде ќе се погрижиме ученикот да ги формализира овие постапки и дејства. Тие овозможуваат да се вклучат сфаќањата развиени од претходните целини, правејќи ги сите писмени подготовки за наставните единици за наставниците и работните листови за учениците што е можно поусогласени меѓу себе и во функција едни на други. Тие, исто така, обезбедуваат можности за ученикот кој има недостатоци и евентуални доцнења да ги покаже, а потоа и да ги поправи.

Задача. Забележете ги дропките $\frac{5}{6}$ и $\frac{3}{8}$. Претворете ги во дропки со ист именител.

$M_6 = \{6, 12, 18, \_\_\_, \_\_\_, \_\_\_, \_\_\_, \_\_\_, \_\_\_, ...\}$

$M_8 = \{8, 16, 24, \_\_\_, \_\_\_, \_\_\_, \_\_\_, \_\_\_, \_\_\_, ...\}$

НЗС (4,6) $= \{24, 48, 72, \_\_\_, \_\_\_, \_\_\_, \_\_\_, \_\_\_, \_\_\_, ...\}$

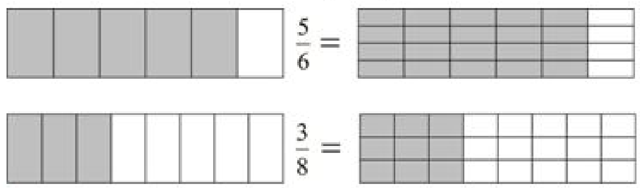
НЗС $_{(6,8)} = 24$

$$\frac{5}{6} = \frac{5 \cdot 4}{6 \cdot 4} = \frac{20}{24}$$

$$\frac{3}{8} = \frac{3 \cdot 3}{8 \cdot 3} = \frac{9}{24}$$

Значи заедничкиот именител на дропките $\frac{5}{6}$ и $\frac{3}{8}$ е 24.

Како ги претвораме дропките $\frac{5}{6}$ и $\frac{3}{8}$ во дропки со заеднички именител 24?



$\frac{5}{6} = \frac{20}{24}$ $\qquad \frac{5}{6} = \frac{5 \cdot}{6 \cdot 4} = \frac{}{24}$

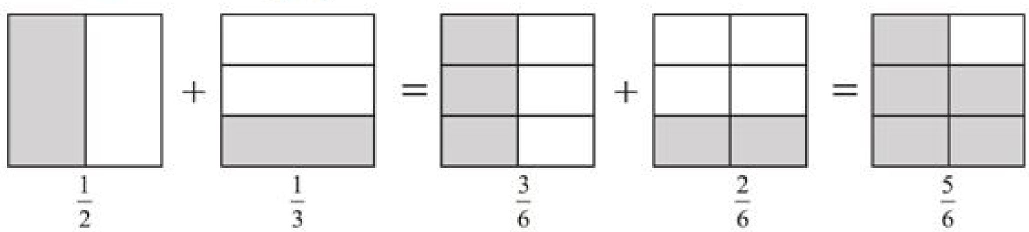
$\frac{3}{8} = \frac{15}{24}$ $\qquad \frac{3}{8} = \frac{3 \cdot}{8 \cdot 3} = \frac{}{24}$

Значи, дропките со различни именители можат да се претворат во дропки со ист именител.

Слика 110: Претворање дропки со различни именители во дропки со ист именител

Сметајќи на знаењата на учениците од претходната наставна единица во која се занимававме со собирање и одземање дропки со заеднички именител, како и од знаењата во воведниот дел од оваа наставна единица за претворањето на дропките со различни именители во дропки со ист именител, проценивме дека се создадени оптимални услови да се види како се врши дејството на собирање и на одземање дропки со различни именители.

Задача. Да ги собереме $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} =$



Значи: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{}{6} + \frac{}{6} = \frac{\ \ + \ \ }{6} = \frac{}{}$

Слика 111: Собирање дропки со различни именители

Во главниот дел од наставната единица, преку илустрирани примери, сакавме да го разјасниме и да го визуализираме процесот на собирање и одземање дропки со различни именители. Овој пример го објаснува и процесот на претворање дропки со различни именители во дропки со ист именител, како и процесот на собирање на овие дропки (претходно како дропки со различни именители, но сега како дропки со ист именител).

Од ова може да заклучиме дека во однос на собирањето и одземањето на дропките, разбирањето на учениците се развило и се проширило на високи нивоа на разбирање според Теоријата Пирие-Киерен. За тоа сведочи фактот што ученикот создал и поседува идеи, факти, поими и постапки, формализирани и структурирани, кои како такви му овозможуваат да го изврши дејството на собирање и одземање дропките со различни именители.

За последниот дел од наставната единица, подготвивме 4 примери што бараат од учениците да ги користат сите тие знаења, факти, формализирани и структурирани процедури за да ги комбинираат двете дејства истовремено (собирање и одземање дропки со различни именители) заедно во истото место/задача. Од ова може да се каже дека учениците (од V одделение) на соодветен начин го достигнале последното ниво на разбирање „Создавање“ според Теоријата Пирие-Киерен.

Задача. Соберете ги и одземете ги дропките: а. $\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{6}$;   б. $\frac{3}{8}$ и $\frac{1}{6}$

Значи, треба да најдеме а. $\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=?$ $\frac{1}{4}-\frac{1}{6}=?$;   б. $\frac{3}{8}+\frac{1}{6}=?$ $\frac{3}{8}-\frac{1}{6}=?$

$\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=?$

НЗС (4,6)=12. Значи заедничкиот именител на дропките е 12.

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{1\cdot}{4\cdot 3}+\frac{1\cdot}{6\cdot 2}=\frac{}{12}+\frac{}{12}=-$$

Продолжете со решавање на други задачи ...

Задача за вежбање:

$\frac{2}{15}+\frac{1}{10}=$ $\frac{7}{10}-\frac{3}{8}=$ $\frac{1}{5}-\frac{1}{10}+\frac{1}{20}=$ $\frac{3}{4}-\frac{3}{10}+\frac{1}{5}=$

Слика 112: Собирање и одземање дропки со различни именители

За да се исполнат барањата од задачите и примерите во сите делови на оваа наставна единица, учениците мора да се вратат на нелинеарен начин на содржините, значењата и претходните поими. Може да се вратат и да се поврзат со содржината на оваа единица, но и на претходните единици, придвижувајќи се напред или назад на нелинеарен начин низ формалните нивоа на разбирање според Теоријата Пирие-Киерен, во функција на развојот и на проширувањето на процесот на разбирање. Ова се и главните карактеристики што се издвојуваат и ја прават Теоријата Пирие-Киерен посебна и ефективна.

3.3. Нивото на математичка писменост во тестовите

Математичката писменост е мостот меѓу реалниот свет и математиката. Целта на математичката писменост е учениците да ја разберат и да ја применат математиката во нивниот личен и професионален живот.

Во нашата докторска дисертација посветивме посебно внимание на математичката писменост. Бидејќи дропките може да се претставаат, да се интерпретираат на различни форми и начини и да се применат во различни области на човековата активност, нивното учење нуди добри можности за спроведување на математичката писменост.

Анализата на тестовите што ги спроведов со учениците од III, IV и V одделение во нашето истражување „Концептот на дропките според Теоријата Пирие-Киерен во почетното математичко образование“ покажува задоволително ниво на присуство на математичка писменост. За тоа сведочи присуството на сите објективни показатели за математичката писменост, чиј степен е детално анализиран.

Од анализата на задачите од тестот во однос на математичката писменост, може да го заклучиме следново:

Тест од III одделение

Ниво: во 7 задачи со вкупно 12 барања, 3 од нив се со ниво I, 2 се со ниво II, 3 се со ниво III, 1 е со ниво IV, 3 се со ниво V, 0 се со ниво VI.

Ниво на тежина на задачите/барањата: 5 задачи се со содржина со релативно мала тежина, 4 со средна тежина и 3 со релативно висока тежина.

Толкување: задачите/барањата за дропките во тестот за трето одделение се толкуваат на следниов начин: на 7 задачи како дел од целината, на 2 како споредба и на 1 како операција.

Презентација/претставување: во 5 задачи/барања дропките се претставени со геометриски фигури (кругови, правоаголници, квадрати), во 2 преку нумеричка линија, симболично во 2, а во 1 се претставени како маса.

Контексти: 6 задачи се од научен контекст, а 1 задача е од личен контекст.

За повеќе детали видете ја табелата подолу.

Табела 8: Табеларен опис на задачи за тест од III одделение

Задача	Ниво	Толкување	Презентација/претставување	Контексти
1	1а. I 1б. II	1а. Како дел на целината 1b. Опис	1а. Геометриски фигури 1b. Опис	Научен
2	2а. I 2б. I	2а. Како дел на целината 2b. Како дел на целината	2а. Геометриски фигури 2b. Геометриски фигури	Научен
3	3а. II 3б. III	3а. Како дел на целината 3b. Како дел на целината	3а. Геометриски фигури 3b. Геометриски фигури	Научен
4	4а. III 4б.III	4а. Како дел на целината 4b. Како дел на целината	4а. Нумеричка линија 4b. Нумеричка линија	Научен
5	IV	Споредба	Симболично	Научен
6	6а. V 6б. V	Споредба	Симболично	Научен
7	V	Операција	Дел на целината, маса	Личен

Тест од IV одделение

Ниво: во 10 задачи со вкупно 14 барања, 1 задача е со ниво I, 3 се со ниво II, 3 се со ниво III, 4 со ниво IV, 2 со ниво V, а 1 со ниво VI.

Ниво на тежина на задачите/барањата: 4 задачи се со содржина со релативно мала тежина, 7 со средна тежина и 3 со релативно висока тежина.

Толкување: 2 како дел на целината, 6 како споредба, а 3 како маса.

Презентација/претставување: 2 со геометриски фигури (правоаголници и кругови), во 7 задачи дропките се претставени симболично, а во 2 задачи дропките се претставени преку предмети.

Контексти: 7 задачи се од научен контекст, а 4 задачи се од личен контекст.

За повеќе детали видете ја табелата подолу.

Табела 9: Табеларен опис на задачи за тест од IV одделение

Задача	Ниво	Толкување	Презентација/претставување	Контекст
1	1а. I 1б. II	1а. Дел од целината 1b. Дел од целината	Геометриска фигура Геометриска фигура	Научен Научен
2	II	Споредба	Симболичен	Научен
3	III x 2	Споредба	Симболичен	Личен x 2
4	II	Споредба	Симболичен	Научен
5	III	Споредба	Симболичен	Научен
6	IV	Споредба	Симболичен	Научен
7	IV x 2	Споредба	Симболичен	Научен
8	IV	Споредба	Симболичен	Научен
9	V x 2	Маса	Предмети	Личен
10	VI	Маса	Предмети	Личен

Тест од V одделение:

Ниво: во 8 задачи со вкупно 15 барања од кои: 1 е со ниво I, 3 со ниво II, 5 со ниво III, 3 со ниво IV и 3 со ниво V.

Ниво на тежина на задачите/барањата: 4 задачи се со содржина со релативно мала тежина, 8 со средна тежина и 3 со релативно висока тежина.

Толкување: 2 како дел на целината, 9 како споредба, а 4 како маса.

Презентација/претставување: 2 преку геометриски фигури (правоаголници, триаголници и квадрати), 9 претставени симболично и 4 преку предмети.

Контексти: од 8 задачи, 6 од нив се од научен контекст и 2 од личен контекст.

За повеќе детали видете ја табелата подолу.

Табела 10: Табеларен опис на задачи за тест од V одделение

Задача	Ниво	Толкување	Презентација/претставување	Контекст
1	1а. I 1б. II	1a. Дел од целината 1b. Дел од целината	Геометриска фигура Геометриска фигура	Научен Научен
2	II	Споредба	Симболичен	Научен
3	II	Споредба	Симболичен	Научен
4	4a. III 4b. III	Споредба Споредба	Симболичен	Научен
5	III x 3	Споредба x 3	Симболичен x 3	Научен
6	V x 2	Споредба x 2	Симболичен x 2	Научен
7	IV x 3	Маса x 3	Предмети x 3	Личен
8	V	Маса	Предмети	Личен

Од анализата на задачите во тестовите за III, IV и V одделение може да заклучиме дека: главно, се земаат предвид препораките на институциите и на стручњаците во однос на математичката писменост, како и општите препораки во однос на учењето на дропките и оценувањето на знаењата за дропките.

Задачите/барањата припаѓаат на сите нивоа на математичката писменост, со исклучок на нивото 6, чијшто недостаток доаѓа повеќе како резултат на специфичните барања на косовската наставна програма за дропките. Од истите причини имаме мала доминација на задачите од ниво III.

Во задачите забележуваме присуство на сите три нивоа на тежина на задачите/барањата, со мала доминација на задачите од средно ниво.

Во однос на толкувањето и прикажувањето на дропките, во тестовите имаме присуство на сите форми и начини на толкување и на прикажување дропки.

Во однос на контекстот, повеќето од задачите се од научен контекст, а помалку задачи се од личен контекст, додека другите контексти не се вклучени. Оваа карактеристика, исто така, повеќе е последица на барањата на косовската наставна програма за дропки.

3.4. Анализа на резултатите од тестот

Нашето истражување го спроведовме во три училишта: ОУ „Паварсија“ од Приштина, ОУ „Бафти Хаџиу“ од Витина и ОУ „Дешморет е Витисе“ од Витина. Од секое училиште беа избрани по две одделенија од III, IV и V одделение (при што едното е експериментално, а другото контролно одделение). Истражувањето е спроведено во месеците мај и јуни 2021 година, кога е планирано да се обработуваат дропките со Наставните програми од III, IV и V одделение.

Во истражувањето беа вклучени вкупно 464 ученици, од кои 239 во експерименталната група (одделенија) и 225 во контролната група (одделенија).

Од III одделение 148 ученици, од кои 80 од експерименталните и 68 од контролните одделенија.

Од IV одделение 166 ученици, од кои 85 од експерименталните и 81 од контролните одделенија.

Од V одделение 150 ученици, од кои 74 од експерименталните и 76 од контролните одделенија.

Во секое од експерименталните одделенија, наставата и учењето на дропки се изведуваше со помош на посебни писмени подготовки за наставниците и со работни листови за учениците кои беа направени во согласност со Теоријата Пирие-Киерен, додека во контролните одделенија наставата се спроведуваше со обични текстови и подготовки.

Потоа ги спроведовме тестовите кои беа исти и за учениците од експерименталните одделенија и за оние од контролните одделенија од сите училишта вклучени во истражувањето.

По решавањето на тестовите и нивното собирање, продолживме со процесот на внесување на нивните резултати во компјутерот. Овој процес го направивме според релевантните методологии (кодирање на тестови и одговори, филтрирање податоци...).

Потоа продолживме со фазата на анализа на податоците преку релевантни статистички параметри, имајќи ја предвид целта на нашето истражување да открие и да докаже присуство на статистички разлики меѓу експерименталната и контролната група како резултат на примената на Теоријата Пирие-Киерен.

Бидејќи нашето истражување имаше за цел да го тестира присуството на статистичка разлика меѓу средини на два независни примероци (меѓу експерименталните одделенија и контролните одделенија), t-тестот најдобро го покажува тоа. Т-тестот се користи за испитување на разликата во средните вредности меѓу два независни примероци. Во нашето истражување имаме два независни примероци: експериментални одделенија и контролни одделенија со претпоставка дека имаат еднакви варијанси.

Како што рековме, во истражувањето беа вклучени ученици од III, IV и V одделение од три училишта: ОУ „Паварсија“ – Приштина, ОУ „Дешморет е Витисе“ – Витина, ОУ „Бафти Хаџиу“ – Витина.

Целата идеја на нашата анализа е да се истакне статистичката разлика меѓу експерименталната група и контролната група.

За анализа на податоците користевме специјализиран софтвер за статистичка анализа EXCEL и SPSS.

Во анализата, како променливи ќе ги земеме:

Одделение: III, IV и V, кодирани со соодветните броеви 3, 4 и 5.

Групи (одделенија): експериментални и контролни, кодирани со 1 – експериментална група (одделение), 2 – контролна група (одделение), како и

Експерименталната променлива: Теоријата Пирие-Киерен.

Прво, да ја погледнеме општата анализа на целиот примерок вклучен во истражувањето.

Табела 11: Општа статистика за целиот примерок

Group Statistics					
	(1) експериментална (2) контролна	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
Тест скор	1	239	8.95	2.091	.135
	2	225	6.17	2.782	.185

Од анализата на резултатите од тестот, констатираме дека: просечниот број точни одговори на сите ученици во експерименталното одделение е 8.95, додека во контролното одделение е 6.17.

Забележуваме дека постои значајна разлика во просечниот број точни одговори во корист на експерименталната група наспроти контролната група. За да докажеме дека оваа разлика има или нема статистичка значајност, ќе го користиме т-тестот.

Табела 12: Податоци за t-testot за целиот примерок

Independent Samples Test										
		Levene's Test for Equality of Variances		t-test for Equality of Means						
		F	Sig.	T	Df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	Std. Error Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
									Lower	Upper
test_skor	Equal variances assumed	17.181	.000	12.199	462	.000	2.777	.228	2.329	3.224
	Equal variances not assumed			**12.097**	**415.084**	**.000****	2.777	.230	2.326	3.228

Со помош на t-тестот ќе го испитаме присуството на статистичка разлика меѓу два независни примероци (експериментална наспроти контролна група).

Податоците од горната табела покажуваат значајна статистичка разлика (**t=12.097, df=415.084, p<0.01**). Со ова го прогласуваме присуството на статистичка разлика меѓу експерименталната група и контролната група како резултат на примената на Теоријата Пирие-Киерен или, со други зборови, ја потврдуваме главната хипотеза на нашето истражување: „Претпоставуваме дека Теоријата (модел) Пирие-Киерен е ефикасен модел во процесот на градење и проширување на разбирањето на дропките кај учениците во одделенска настава“.

Сите овие статистички податоци докажуваат дека Теоријата Пирие-Киерен била многу плодна и успешна во третманот и во тестирањето на сите содржини кај учениците вклучени во истражувањето.

Во продолжение одделно ќе ја прикажеме анализата на резултатите од тестовите за III, IV и V одделение од сите училишта заедно.

3.4.1. Анализа на резултатите од тестот за III одделение

Во нашето истражување беа опфатени вкупно 148 ученици од трите одделенија, од кои 80 ученици беа во експерименталната група (одделение) и 68 во контролната група (одделение).

Табела 13: Општа статистика за III одделение

Group Statistics[a]					
	(1) експериментална (2) контролна	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
test_skor	1	80	9.84	1.739	.194
	2	68	7.32	3.150	.382
a. одделение = 3					

Податоците од горната табела ни покажуваат очигледни статистички разлики меѓу експерименталната група и контролната група, како што се: во просечниот број точни одговори во корист на експерименталната група (M.E.=9.84) наспроти контролната група (M.K.=7.32); стандардната девијација е многу помала кај експерименталната група (SD=1.74) во однос на контролната група (SD=3.15), што значи дека резултатите се многу похомогени во експерименталната група во однос на контролната група.

Табела 14: Податоци за t-testot за III одделение

Independent Samples Test[a]										
		Levene's Test for Equality of Variances		t-test for Equality of Means						
		F	Sig.	T	Df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	Std. Error Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
									Lower	Upper
test_skor	Equal variances assumed	27.473	.000	6.126	146	.000	2.514	.410	1.703	3.325
	Equal variances not assumed			**5.865**	100.485	.000	2.514	.429	1.664	3.364

a. одделение = 3

Податоците во горната табела покажуваат статистички значајна разлика меѓу експерименталната и контролната група на трето одделение (**t=5,865, df=100,485, p<0,01**). Со ова, констатираме присуство на статистичка разлика меѓу експерименталната и контролната група кај учениците од возрасната група од III одделение, како резултат на примената на Теоријата Пирие-Киерен.

Затоа, имаме докази дека во возрасната група (III одделение), Теоријата (моделот) Пирие-Киерен резултира со сигнификантно повисок успех во споредба со традиционалниот метод.

3.4.2. Анализа на резултатите од тестот за IV одделение

Од IV одделение, нашето истражување опфати 85 ученици од експерименталното одделение и 81 ученик од контролното одделение.

Табела 15: Општа статистика за IV одделение

Group Statistics[a]					
	(1) експериментално (2) контролно	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
test_skor	1	85	9.16	2.235	.242
	2	81	5.95	2.697	.300
a. одделение = 4					

Податоците од горната табела за IV одделение покажуваат видлива разлика меѓу експерименталната и контролната група, како што се: во просечниот број точни одговори во корист на експерименталната група (M= 9.16) наспроти оној на контролната (M= 5.95); стандардната девијација е помала во експерименталната група (SD=2.24) во однос на онаа од контролната група (SD=2.70), што значи дека резултатите се похомогени во експерименталната група во однос на оние на контролната група.

Табела 16: Податоци за t-testot за IV одделение

Independent Samples Test[a]										
		Levene's Test for Equality of Variances		t-test for Equality of Means						
		F	Sig.	T	Df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	Std. Error Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
									Lower	Upper
test_skor	Equal variances assumed	2.528	.114	8.376	164	.000	3.214	.384	2.456	3.972
	Equal variances not assumed			**8.339**	**155.545**	.000	3.214	.385	2.453	3.975

a. одделение = 4

Пресметката со t-тест за независни примероци (Табела 16) покажува дека гореспоменатата разлика меѓу експерименталната и контролната група во рамките на четврто одделение е статистички значајна (**t=8.339, df=155.545, p<0,01**). Според тоа, имаме доказ дека во рамките на оваа возрасна група (четврто одделение) експерименталниот метод (Теоријата Пирие-Киерен) резултира со сигнификантно повисок успех во споредба со традиционалниот метод.

3.4.3. Анализа на резултатите од тестот за V одделение

Од V одделение, нашето истражување опфати 74 ученици од експерименталното одделение и 76 ученици од контролното одделение.

Табела 17: Општа статистика за V одделение

Group Statistics[a]					
	(1) експериментална (2) контролна	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
test_skor	1	74	7.73	1.674	.195
	2	76	5.37	2.141	.246
a. одделение = 5					

Податоците од горната табела за V одделение покажуваат очигледни статистички разлики меѓу експерименталната и контролната група, како што се: во просечниот број точни одговори во корист на експерименталната група (M= 7,73) наспроти оној на контролната (M= 5,37); стандардната девијација е многу помала во експерименталната група (SD=1,67) во однос на онаа од контролната група (SD=2,14), што значи дека резултатите се многу похомогени во експерименталната група во однос на оние на контролната група.

Табела 18: Податоци за t-testot за V одделение

Independent Samples Test[a]										
		Levene's Test for Equality of Variances		t-test for Equality of Means						
		F	Sig.	T	Df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	Std. Error Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
									Lower	Upper
test_skor	Equal variances assumed	5.133	.025	7.512	148	.000	2.361	.314	1.740	2.982
	Equal variances not assumed			**7.536**	**141.467**	.000	2.361	.313	1.742	2.981
a. одделение = 5										

Податоците од горната табела за т-тестот (**t=7.536, df=141.467, p<0.01**) покажуваат присуство на статистичка разлика меѓу експерименталната и контролната група кај учениците од V одделение.

Затоа, имаме докази дека во оваа возрасна група (V одделение) експерименталниот метод, Теоријата (моделот) Пирие-Киерен резултира со сигнификантно повисок успех во споредба со традиционалниот метод.

За тестирање на значајноста на разликите меѓу просечните постигања на учениците од III, IV и V одделение предизвикани од употребата на Теоријата Пирие-Киерен, го користевме ANOVA-тестот.

Табела 19: Табела Descriptives од тестот ANOVA

Descriptives								
test_skor								
	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error	95% Confidence Interval for Mean		Minimum	Maximum
					Lower Bound	Upper Bound		
3	148	8.68	2.780	.229	8.23	9.13	0	12
4	166	7.60	2.944	.228	7.15	8.05	0	12
5	150	6.53	2.255	.184	6.17	6.90	1	10
Total	464	7.60	2.814	.131	7.34	7.86	0	12

Табелата Descriptives ни дава основни статистички податоци, како што се средната вредност, стандардното отстапување за секоја група (III, IV и V одделение). Од табелата откриваме дека имаме различни просеци по бројот на точни одговори. За да откриеме дека оваа разлика меѓу овие просеци има или нема статистичка значајност го користиме ANOVA-тестот.

Табела 20: Тестот ANOVA

ANOVA					
test_skor					
	Sum of Squares	Df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	344.074	2	172.037	23.864	.000
Within Groups	3323.365	461	7.209		
Total	3667.440	463			

Од табеларните податоци на ANOVA-тестот (sig. .000...) откриваме дека имаме статистички значајни разлики меѓу III, IV и V одделение вклучени во истражувањето како резултат на примената на Теоријата Пирие-Киерен.

Со помош на соодветен пост-хотест (Scheffe), ќе биде точно покажано меѓу кои возрасни групи се лоцирани разликите.

Табела 21: Табела со повеќе споредби (Multiple Comparisons)

Multiple Comparisons						
Dependent Variable: test_skor						
Scheffe						
(I) одделение	(J) одделение	Mean Difference (I-J)	Std. Error	Sig.	95% Confidence Interval	
					Lower Bound	Upper Bound
3	4	1.086*	.304	.002	.34	1.83
	5	2.149*	.311	.000	1.39	2.91
4	3	-1.086*	.304	.002	-1.83	-.34
	5	1.063*	.302	.002	.32	1.81
5	3	-2.149*	.311	.000	-2.91	-1.39
	4	-1.063*	.302	.002	-1.81	-.32
*. The mean difference is significant at the 0.05 level.						

Пост-хок тестот покажува дека установената статистички значајна интергрупна разлика се однесува на сите три групи една кон друга, во сите можни комбинации: (а) учениците од III одделение имаат повисок просечен скор и од IV и од V одделение, (б) учениците од IV одделение имаат понизок просечен скор од III одделение, но повисок од V одделение, и (в) учениците од V одделение имаат понизок просечен скор и од III и од IV одделение.

Оваа статистичка разлика ја толкуваме графички како на следната слика.

Слика 113: Статистичка разлика меѓу III, IV и V одделение според тестот ANOVA (адаптирано од (Albayrak, и др., 2017, стр. 155)

3.5. Анализа на ефектите од примената на Теоријата Пирие-Киерен во исполнувањето на предвидените резултати од учењето во нашето истражување

3.5.1. Анализа за исполнувањето на предвидените резултати од учењето во III одделение

Преку писмени подготовки за наставниците и работни листови за учениците од експерименталните паралелки, според Теоријата Пирие-Киерен, имавме за цел да создадеме најсоодветна и најефективна содржина за исполнување на резултатите од учењето за дропки, предвидени со Наставната програма за III одделение и креирани според MASHT-а.

Подолу, ги наведуваме специфичните резултати од учењето за дропки за III одделение на кои го фокусиравме нашето истражување.

Ученикот:

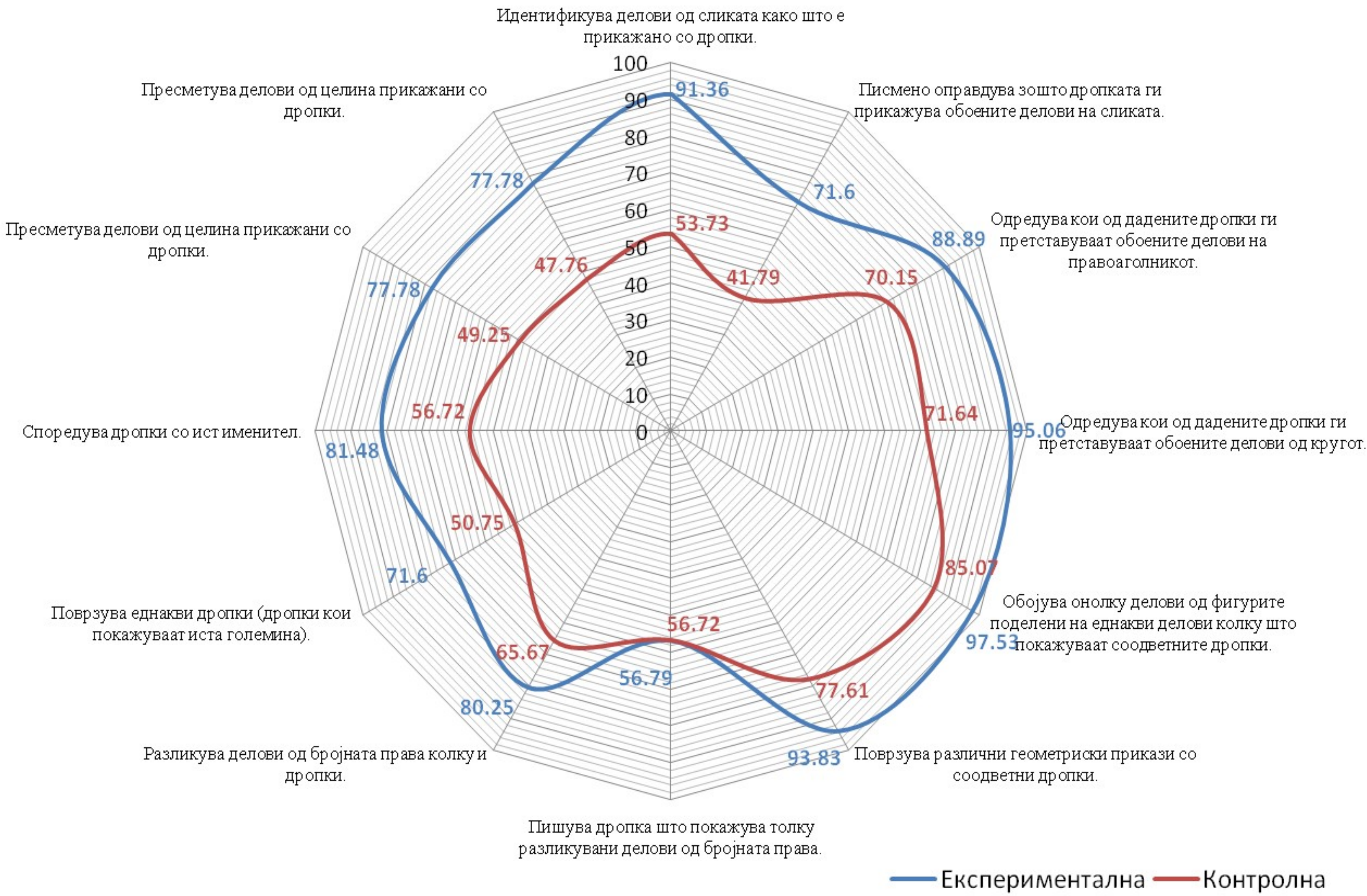
- Идентификува делови од сликата како што е прикажано со дропките.
- Писмено оправдува зошто дропката ги прикажува обоените делови на сликата.
- Определува кои од дадените дропки ги претставуваат обоените делови на правоаголникот.
- Определува кои од дадените дропки ги претставуваат обоените делови од кругот.
- Обојува онолку делови од фигурите поделени на еднакви делови колку што покажуваат соодветните дропки и слично.
- Поврзува различни геометриски прикази со соодветни дропки.
- Пишува дропка што покажува толку разликувани делови од бројната права.
- Разликува делови од бројната права колку и дропки.
- Поврзува еднакви дропки (дропки што покажуваат иста големина).
- Споредува дропки со ист именител.
- Споредува дропки со ист броител.
- Пресметува делови од целина прикажани со дропки.

Со цел да се види степенот на исполнување на овие резултати од учењето и во експерименталната и во контролната група, го направивме соодветниот тест. Секој од горенаведените резултати го претворивме во задача/барање сама по себе.

Тестот за III одделение се состои од 7 задачи со вкупно 12 барања. Резултатите од тестот ги претставивме во табелата и во графиконот што следуваат:

Табела 22: Степенот (процентот) на исполнување на резултатите од учењето за III одделение

Наменети резултати од учењето (задачи)	**Експериментална**	**Контролна**
Идентификува делови од сликата како што е прикажано со дропки.	91.36	53.73
Писмено оправдува зошто дропката ги прикажува обоените делови на сликата.	71.6	41.79
Определува кои од дадените дропки ги претставуваат обоените делови на правоаголникот.	88.89	70.15
Определува кои од дадените дропки ги претставуваат обоените делови од кругот.	95.06	71.64
Обојува онолку делови од фигурите поделени на еднакви делови колку што покажуваат соодветните дропки.	97.53	85.07
Поврзува различни геометриски прикази со соодветни дропки.	93.83	77.61
Пишува дропка што покажува толку разликувани делови од бројната права.	56.79	56.72
Разликува делови од бројната права колку и дропки.	80.25	65.67
Поврзува еднакви дропки (дропки што покажуваат иста големина).	71.6	50.75
Споредува дропки со ист именител.	81.48	56.72
Пресметува делови од целина прикажани со дропки.	77.78	49.25
Пресметува делови од целина прикажани со дропки.	77.78	47.76



Граф. 1: Графикон на степенот на постигање на резултатите од учењето во експерименталната и во контролната група за III одделение

Од горната табела и од графиконот може да заклучиме дека постои изразена разлика во исполнувањето на повеќето резултати од учењето во корист на експерименталната група наспроти контролната група кај учениците од трето одделение, како резултат на примената на Теоријата Пирие-Киерен.

Просечниот процент на бројот на точни одговори во експерименталната група е 81,14 %, додека во контролната група е 61,19 %, што е многу значајна разлика.

За секој исход од учењето забележуваме дека учениците од експерименталната група успеале да го исполнат секој од нив поуспешно од учениците од контролната група.

Општокажано, може да заклучиме дека Теоријата Пирие-Киерен се покажала како доста успешна во постигнувањето на предвидените резултати за учениците од трето одделение вклучени во истражувањето.

3.5.2. Анализа за исполнувањето на предвидените резултати од учењето во IV одделение

Преку писмените подготовки за наставниците и работните листови за учениците од IV одделение, направени во согласност со Теоријата Пирие-Киерен за работа во експерименталните часови, имавме за цел да создадеме содржина што е можно посоодветна за да се исполнат резултатите од учењето за дропките предвидени со IV одделение со Наставната програма дизајнирана од MASHT.

Подолу ќе ги наведеме резултатите од учењето за дропките на кои се фокусираше нашето истражување.

Ученикот:

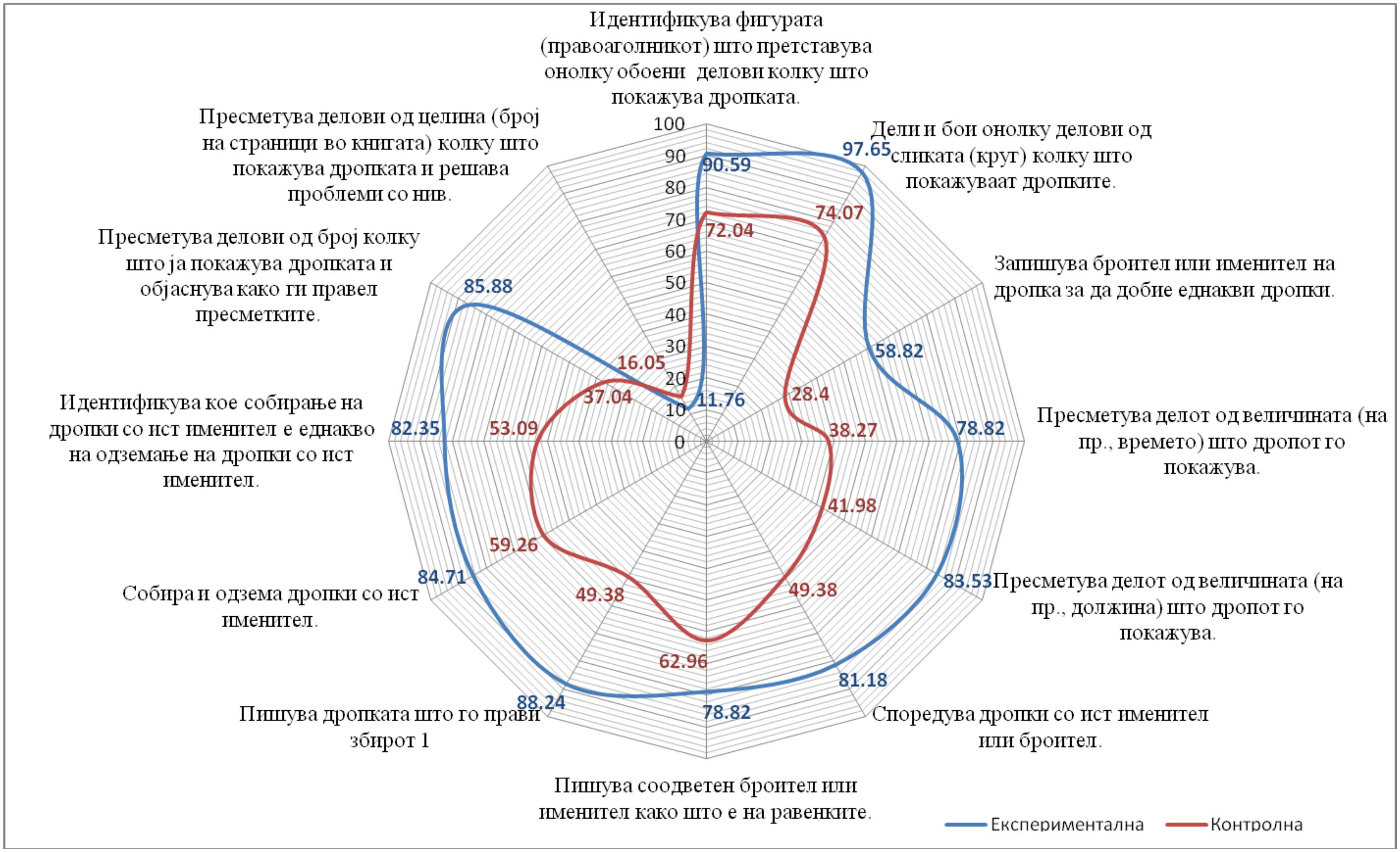
- Идентификува фигура (правоаголник) што претставува онолку обоени делови колку што покажува дропката.
- Дели и бои онолку делови од сликата (круг) колку што покажуваат дропките.
- Запишува броител или именител на дропка за да добие еднакви дропки.
- Пресметува дел од величината (на пример, времето) што го покажува дропката.
- Споредува дропки со ист именител или броител.
- Пишува соодветен броител или именител како што е на равенките.
- Пишува дропка што го прави збирот 1.
- Собира и одзема дропки со ист именител.
- Идентификува кое собирање на дропки со ист именител е еднакво на одземање дропки со ист именител.
- Пресметува делови од број колку што покажува дропката и објаснува како ги правел пресметките.
- Пресметува делови од целина (на пример, број на страници во книга) колку што покажува дропката и решава проблеми со нив.

За да го видиме степенот на исполнување на овие резултати од учењето и за експерименталната и за контролната група, направивме еден тест. Секој од горенаведените резултати го претворивме во посебна задача/барање.

Тестот за четврто одделение содржи 10 задачи со вкупно 12 барања. Резултатите од тестот ги претставивме во табелата и во графиконот што следуваат:

Табела 23: Степенот (процентот) на исполнување на резултатите од учењето за IV одделение

Наменети резултати од учењето (задачи)	**Експериментална**	**Контролна**
Идентификува фигура (правоаголник) што претставува онолку обоени делови колку што покажува дропката.	90.59	72.04
Дели и бои онолку делови од сликата (круг) колку што покажуваат дропките.	97.65	74.07
Запишува броител или именител на дропка за да добие еднакви дропки.	58.82	28.4
Пресметува дел од величината (на пример, времето) што го покажува дропката.	78.82	38.27
Пресметува дел од величината (на пример, должина) што го покажува дропката.	83.53	41.98
Споредува дропки со ист именител или броител.	81.18	49.38
Пишува соодветен броител или именител како што е во равенките.	78.82	62.96
Пишува дропка што го прави збирот 1.	88.24	49.38
Собира и одзема дропки со ист именител.	84.71	59.26
Идентификува кое собирање на дропки со ист именител е еднакво на одземање дропки со ист именител.	82.35	53.09
Пресметува делови од број колку што покажува дропката и објаснува како ги правел пресметките.	85.88	37.04
Пресметува делови од целина (број на страници во книга) колку што покажува дропката и решава проблеми со нив.	11.76	16.05



Граф. 2: Графикон на степенот на постигање на резултатите од учењето во експерименталната и во контролната група за IV одделение

Од горната табела и од графиконот може да заклучиме дека и во IV одделение имаме изразена разлика во исполнувањето на повеќето резултати од учењето во корист на експерименталната група наспроти контролната група, како резултат на примената на Теоријата Пирие-Киерен.

Просечниот процент на бројот на точни одговори во експерименталната група е 76,86 %, додека во контролната група е 48,49 %, што е многу значајна разлика.

За секој резултат од учењето забележуваме дека учениците од експерименталната група успеале да го исполнат секој од нив поуспешно од учениците од контролната група, освен последниот резултат (задача).

Од сето ова може да заклучиме дека Теоријата Пирие-Киерен се покажала доста успешна во постигнувањето на предвидените резултати дури и кај учениците од IV одделение вклучени во истражувањето.

3.5.3. Анализа за исполнувањето на предвидените резултати од учењето во V одделение

Дури и во писмените подготовки за наставниците и во работните листови за учениците од V одделение, направени во согласност со Теоријата Пирие-Киерен за работа на експерименталните часови, имавме цел да создадеме содржина што е можно посоодветна за исполнување на исходите од учењето за дропки предвидени со Наставната програма за V одделение, а дизајнирана од MASHT-a.

Подолу ќе ги наведеме резултатите од учењето за дропките на кои се фокусираше нашето истражување.

Ученикот:

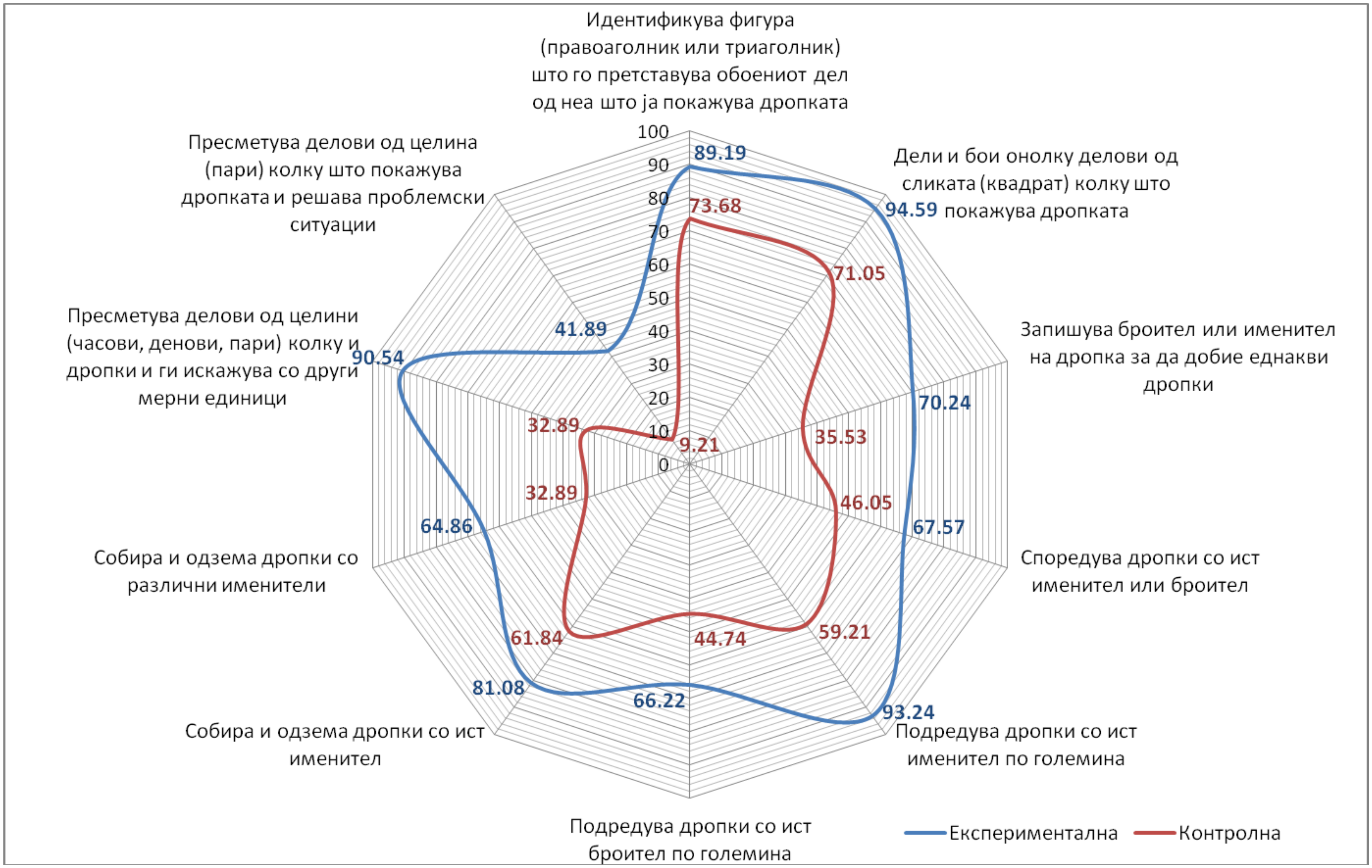
- Идентификува фигура (правоаголник или триаголник) што го претставува обоениот дел од неа и ја покажува дропката.
- Дели и бои онолку делови од сликата (квадрат) колку што покажува дропката.
- Запишува броител или именител на дропка за да добие еднакви дропки.
- Споредува дропки со ист именител или броител.
- Определува дропки со ист именител по големина.
- Определува дропки со ист броител по големина.
- Собира и одзема дропки со ист именител.
- Собира и одзема дропки со различни именители.
- Пресметува делови од целини (часови, денови, пари) и од дропки и ги искажува со други мерни единици.
- Пресметува делови од целина (пари) колку што покажува дропката и решава проблемски ситуации.

Со цел да се види степенот на исполнување на овие резултати од учењето и во експерименталната и во контролната група, направивме соодветен тест. Секој од горенаведените резултати го претворивме во задача/барање сама по себе.

Тестот за петто одделение се состои од 8 задачи со вкупно 10 барања. Резултатите од тестот ги претставивме во табелата и во графиконот што следуваат:

Табела 24: Степенот (процентот) на исполнување на резултатите од учењето за V одделение

Наменети резултати од учењето (задачи)	**Експериментална**	**Контролна**
Идентификува фигура (правоаголник или триаголник) што го претставува обоениот дел од неа и ја покажува дропката.	89.19	73.68
Дели и бои онолку делови од сликата (квадрат) колку што покажува дропката.	94.59	71.05
Запишува броител или именител на дропка за да добие еднакви дропки.	70.24	35.53
Споредува дропки со ист именител или броител.	67.57	46.05
Определува дропки со ист именител по големина.	93.24	59.21
Определува дропки со ист броител по големина.	66.22	44.74
Собира и одзема дропки со ист именител.	81.08	61.84
Собира и одзема дропки со различни именители.	64.86	32.89
Пресметува делови од целина (часови, денови, пари) и дропки и ги искажува со други мерни единици.	90.54	32.89
Пресметува делови од целина (пари) колку што покажува дропката и решава проблемски ситуации.	41.89	9.21



Граф. 3: Графикон на степенот на постигање на резултатите од учењето во експерименталната и во контролната група за V одделение

Како резултат на примената на Теоријата Пирие-Киерен при создавањето на писмените подготовки за наставниците и за учениците, кај учениците од V одделение имаме изразена разлика во исполнувањето на најголемиот дел од предвидените резултати меѓу експерименталната група (одделение) и контролната група (одделение).

Просечниот процент на точни прашања во експерименталната група (одделение) е 75,94 %, додека во контролната група (одделение) е 46,70 %, што е многу значајна разлика.

За секој резултат од учењето забележуваме дека учениците кои работеле со писмени подготовки според Теоријата Пирие-Киерен успеале да ги исполнат многу поуспешно од учениците кои работеле со обични подготовки и текстови.

Општоземено, може да заклучиме дека Теоријата Пирие-Киерен се покажала како доста ефикасна во постигнувањето на секој нејзин резултат, наменета за учениците од петто одделение вклучени во истражувањето.

ЗАКЛУЧОЦИ И ПРЕПОРАКИ

ЗАКЛУЧОЦИ ОД НАШЕТО ИСТРАЖУВАЊЕ

Факт е дека во Косово недостига соодветно истражување за учење дропки. Недостигот од ова истражување создаде простор за ад хок пристапи и дејства во наставните програми и во учебниците, во структурата и во обемот на наставните содржини.

За време на мојата истражувачка работа во врска со учењето на дропките и ефектите од примената на Теоријата Пирие-Киерен на Косово, забележавме низа проблеми кои го придружуваат процесот на предавање и учење дропки, кои ќе ги презентираме подолу.

Во однос на наставните програми и на учебници што се однесуваат на дропките, констатираме дека, главно, тие се суштински. И покрај тоа, има определени пропусти кои се од методолошко-дидактички карактер: содржините не се логички распоредени; несоодветна визуализација (прикажување); несоодветно приспособување на возраста (одделение) на учениците итн...

Од деталната анализа на Наставната програма по математика за дропки, имаме многу кратка и многу општа листа на исходи од учењето. И покрај малиот број на овие резултати од учењето, дури и оние неколку, тие се дадени по нелогичен редослед. Ова нелогично определување на исходите од учењето на дропките во наставните програми ги прави нефункционални едни со други. Учењето на дропките по овој редослед предизвикува конфузија и кај наставниците и кај учениците и покрај фактот што содржината на дропките сама по себе се смета за доста сложена содржина.

Поради овие недостатоци на исходите од учењето (барањата) и по број и по содржина, тие ниту ги појаснуваат ниту ги водат дизајнерите на текст или наставниците при создавањето содржина за дропки.

Од општата анализа на Наставните програми по математика за III, IV и V одделение во однос на дропките е изразен недостатокот на логички врски меѓу содржините. Лесно е да се добие впечаток дека третманот на дропките во наставната програма за определено одделение започнува од почеток, од нула, без да се смета на претходното знаење на учениците добиено од претходните одделенија.

Сите учебници по математика се напишани од исти автори (Рамадан Зејнулаху и Сејди Билали) и се издадени од истата издавачка куќа „Дукаѓини" од Пеќ, што зборува за еден вид монопол.

Учебниците по математика во определена мера ги обработуваат дропките во некои од аспектите поврзани со нив, како што се: нивното значење, споредба, операции со нив итн..., но со сето ова, некои пропусти имаат методски и дидактички карактер, во визуализацијата (презентацијата) и во контекстуализацијата на содржините за дропки. Првите примери избрани со цел да се разјасни значењето на дропките може да бидат поопипливи и позначајни и како такви од почеток да го разјаснат значењето на елементите и основните карактеристики на дропките, на пример, дропка е ознака, означува и изразува еден или повеќе еднакви делови на кои е поделена единицата. Исто така, преку овие претстави треба да се разјасни значењето на составните елементи на дропките (броител и именител) итн.

Во овие учебници имаме недостиг од дидактички средства (следни делови кои не се основен текст, но се во функција на учебникот и придонесуваат за подобро разбирање на неговите информации, како што се: прашања, задачи, изрази, зборови, илустрации, биографии, коментари, инструкции итн. (Azemi, B., Morina, B. 2013). Тоа, веројатно, е последица на ориентацијата на авторите кон научните содржини, игнорирајќи ги методските и дидактичките елементи.

При анализата на математичката писменост во тест-задачите за III, IV и V одделение се констатира задоволително присуство на нивото на математичка писменост. За тоа сведочи присуството на сите објективни показатели за математичка писменост, чие ниво е детално анализирано.

Од општата анализа на резултатите од тестот, забележуваме дека постои значајна разлика во просечниот број точни одговори во корист на експерименталната група наспроти контролната група. За да докажеме дека оваа разлика има или нема статистичка значајност, го користевме т-тестот. Од податоците на општата анализата на т-тестот забележуваме присуство на статистичка разлика меѓу експерименталната и контролната група како резултат на примената на Теоријата Пирие-Киерен. Дури и анализите за секое одделение посебно ги покажуваат очигледните предности во корист на експерименталната група како резултат на примената на Теоријата Пирие-Киерен.

Преку писмени подготовки за наставниците и работни листови за учениците од експерименталните одделенија, според Теоријата Пирие-Киерен, имавме за цел да создадеме најсоодветна и најефективна содржина за исполнување на резултатите од учењето за дропки, предвидени со Наставната програма според MASHT-а.

За секое одделение (III, IV и V) подготвивме листа на конкретни резултати на кои го засновавме нашето истражување. Со цел да се види степенот на исполнување на овие резултати од учењето и во експерименталната и во контролната група, направивме соодветен тест. Секој од горенаведените резултати го претворивме во задача/барање сама по себе. Од анализите може да заклучиме дека постои изразена разлика во исполнувањето на повеќето резултати од учењето во корист на експерименталната група наспроти контролната група, како резултат на примената на Теоријата Пирие-Киерен.

Општоземено, може да заклучиме дека Теоријата Пирие-Киерен се покажа како доста успешна во постигнувањето на предвидените резултати за учениците од трето одделение вклучени во истражувањето.

ПРЕПОРАКИ ОД НАШЕТО ИСТРАЖУВАЊЕ

Врз основа на податоците собрани од различни литературни и истражувачки резултати, може да ги дадеме следните препораки:

- Релевантните институции во Косово треба уште повеќе да работат на создавање курикуларни филозофии кои се приспособуваат на условите и околностите на земјата и кои сметаат на потенцијалите, можностите и недостатоците на земјата. Значи, да се изгради сет на компоненти околу потребите на учениците и најсоодветни начини за да се реализираат овие потреби на систематски и продуктивен начин (Noti, 2013). Во основата на курикуларните филозофии се подразбираат различни рецепти за тоа како да се избере содржината на наставната програма, да се организира, да се моделира аспектот на учење на образовната програма и да се донесуваат евалуативни судови за тоа дали учениците успеале да научат.

- Да се отвори широка дебата во која би се вклучиле експерти, наставници, методичари, автори на текстови од областа на математиката, како и психолози, педагози и други компетентни специјалисти со цел да се разговара за проблемите, тешкотиите и да се истакнат недостатоците на програмите и на учебниците и изнаоѓање можности за нивно решавање и подобрување. Дел од овие дискусии треба да бидат за дропките и за сите други содржини посебно, чија дискусија треба да се прави во стручни подгрупи.

- Поради важноста на дропките за математиката и за другите области, Косово итно треба да започне вистинско истражување за учење дропки и други математички содржини од кои може да учиме за најсоодветното одделение (возраст) за учење дропки и други содржини за начинот и за методологијата на нивното презентирање пред учениците.

- Во согласност со наодите од овие истражувања, треба да се преземат итни активности за преглед на програмите и на учебниците, начинот и стратегиите на нивното спроведување и учење. Во многу земји, како резултат на овие наоди од истражувањата се развиени насоки и стратегии за подучување дропки.

- Косово треба да ја искористи подготвеноста на УНЕСКО (во 2005 година ја подготви Стратегијата за учебници и наставни средства) и на другите релевантни институции кои изразија подготвеност да создадат добра школа на автори и оценувачи на училишни учебници, нагласувајќи го учеството во нивното создавање или развој на повеќе наставници и дидактички експерти кои помагаат да се направат едноставни и мотивирачки текстови за интересите за учење на учениците (Noti, 2013).

- Дизајнот на наставните планови и на учебниците треба да го прават проширени работни групи. Во истражувањето направено од УНЕСКО во 2010 година за околу 400 учебници по јазик и по математика, се чини дека во повеќето случаи текстовите се напишани од развивачи на наставни програми и специјалисти за предмети (многу од нив работат во академии или дури и надвор од образовниот систем), тесна соработка со наставниците кои ги предлагаат целите на учењето на единиците и наставните предмети. Ова значи дека учебниците стануваат конкретни алатки за работа и учење за наставниците и учениците само доколку е обезбедена тимска работа: професори/изготвувачи на наставни програми и наставници (Noti, 2013).

- Да се понуди можност за приспособување на книги по математика, содржини за дропки како и други теми со книгите од земјите со понапредни образовни системи. Ова приспособување треба да се направи внимателно за да може тие содржини да се сообразат со косовската реалност и контекст.

- Да се формираат тимови за евалуација на наставните текстови кои, исто така, треба да бидат составени од компетентни експерти што треба да даваат оценки од различни професионални перспективи. Во многу земји имаме професионални институции за евалуација на учебниците кои како такви имаат изготвено протоколи за нивно оценување (на пример, во Италија го имаме Институтот за квалитет на учебниците).

- Со цел да се олесни разјаснувањето на значењето на дропките и дејствата со нив, помагалата, манипулативите, како и другите алатки за конкретизација треба да се објавуваат и да се произведуваат од различни материјали, на пример, од пластика, дрво или од магнетни елементи (што се прикачуваат на таблата), која треба да се користи или да се закачи на ѕидовите од училницата цело време додека се зборува за дропки.

- Треба да се направат и да се користат софтверски програми кои ќе ги визуализираат и ќе ги прават дропките за учење попривлечни. Слични програми наоѓаме насекаде во различни земји во светот. Доколку не е можно да се направат такви програми, со релевантни договори, програмите што се во употреба во многу од овие земји може да се приспособат, преведени за употреба од страна на наставниците и учениците од Косово. За тоа да биде што е можно поефективно, би било неопходно да се направи поврзување и координација меѓу програмите и учебниците со овие софтвери.

- За наставниците одвреме-навреме треба да се организираат стручни обуки за дропки и за други математички содржини бидејќи наставниците не треба да се потпираат само врз знаењето што го стекнале во текот на студирањето. Така се прави во многу земји во светот.

- Министерствата за образование, составувачите на наставни програми и на учебници периодично треба да ги добиваат мислењата на наставниците, учениците и другите во врска со наставните програми, учебниците за дропки и други математички содржини.

- Како и во многу земји во светот, Косово исто така треба да објавува електронски верзии на учебници по математика и по други наставни области, кои ќе бидат во врска со печатените текстови, со соодветниот софтвер, како и за обезбедување пристап до различни веб-страници каде што се објаснуваат дропки и други математички содржина. Тоа би биле плус можности за стекнување знаења и операции со дропки и други содржини за учење.

- Бидејќи математичкото разбирање (и не само по математика) се смета за внатрешен психолошки процес, треба да се посвети посебно значење на подигнувањето на знаењето на наставниците во однос на психологијата на учениците, особено за начинот на кој децата разбираат и учат.

Бидејќи од статистичките податоци презентирани погоре силно е утврдено дека Теоријата Пирие-Киерен се покажала како успешна во третманот на дропки за III, IV и V одделение, во врска со ова имам неколку препораки:

- Надлежните образовни институции во Косово да создаваат можности оваа теорија да ја тестираат и за други математички содржини.

- При составување наставни програми и учебници, и други специфични математички содржини, како на пример дропки, препорачуваме користење на Теоријата Пирие-Киерен (како нивелирана, но нелинеарна, рекурзивна и трансцендентална теорија) бидејќи ќе ги направи програмите и текстовите усогласени, меѓусебно поврзани и реципрочни содржини за учење едни со други.

- Исто така, употребата на Теоријата Пирие-Киерен во голема мера би го олеснила процесот на вреднување на знаењата на учениците бидејќи ги нивелизира содржините, а воедно и резултатите од учењето кои треба да се вреднуваат за степенот на нивното исполнување.

- Оценувачите на наставните програми и на учебниците може да ја користат Теоријата Пирие-Киерен како многу ефикасен објектив/филтер за нивната евалуација на содржината.

- Исто така, употребата на Теоријата Пирие-Киерен во голема мера би го олеснила процесот на вреднување на знаењето на учениците бидејќи оваа теорија ги израмнила содржината и резултатите од учењето. Така, мерењето на степенот на исполнување на овие очекувања ќе биде полесно и поефикасно.

Во врска со математичката писменост во математичкото образование во Косово, се обидувам да дадам неколку препораки:

- Развивање на национални стандарди за постигања во математичката писменост. Тие треба да бидат придружени со водич за нивно исполнување, како и со инструменти за оценување на степенот на нивното постигнување.

- Изготвувачите на наставни програми, составувачите и создавачите на учебници и наставни средства, како и оние на инструментите за оценување треба да посветат посебно внимание на математичката писменост и на нејзиното оценување.

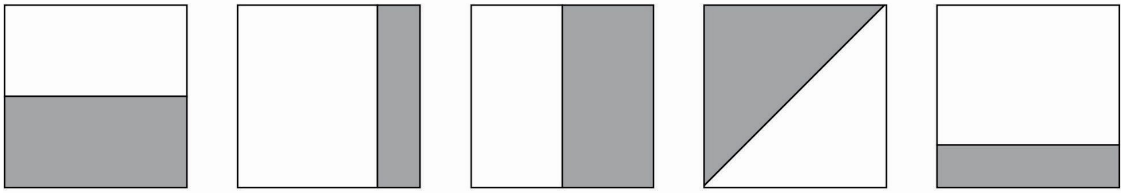
ПРИЛОЗИ

Работни листови за ученици

Прилог. 1. Работен лист за учениците за наставна единица #3/1

Наставна единица: #3/1. **Дропки. Разбирање на нив**

1. Да ги погледнеме сликите подолу:



(1) (2) (3) (4) (5)

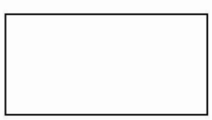
Што забележуваме овде?

Како се поделени секоја од фигурите?

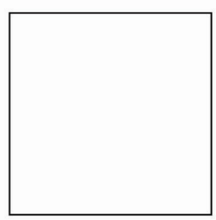
Што може да кажеме за поделбите на сликите 1, 3 и 4?

Што е со поделбите на сликите 2 и 5?

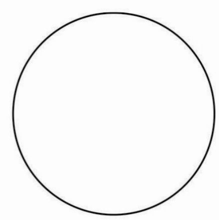
2. Поделете ги дадените фигури на:



2 еднакви дела



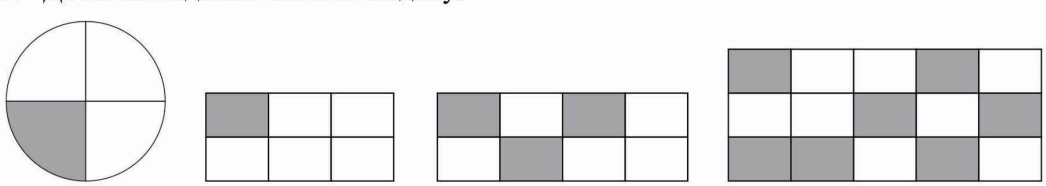
4 еднакви дела



8 еднакви дела

Ќе ги разгледаме само поделбите на големината на еднакви делови.

3. Да ги погледнеме сликите подолу:



1 2 3 4

Како се поделени и обоени фигурите?

Сл.	Вкупно еднакви делови	Тие се обоени	Необоени
1	4	1	3
2			
3			
4			

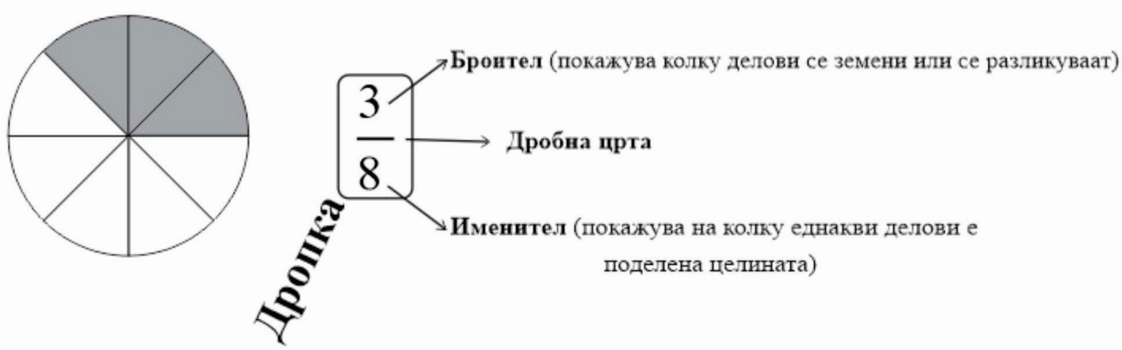
Како може да одговориме на прашањето

Како се поделени фигурите? ____

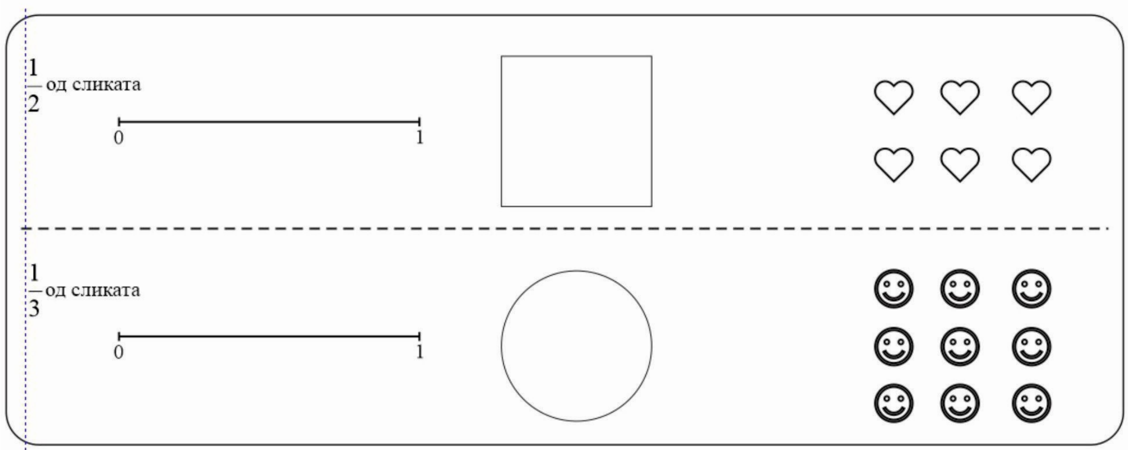
Колку делови се обоени? ____

Колку делови се необени? ____

Забелешка: $\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}$ се нарекуваат **дропки**.



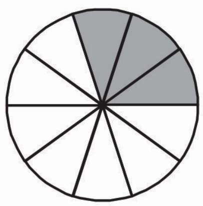
Задача. Разликувајте ги обојте ги деловите од фигурите како што ги претставуваат дропките:



Прилог. 2. Работен лист за учениците за наставна единица #3/2

Наставна единица: #3.2. **Дропката како дел од целината.**

1. Погледнете внимателно на сликата:



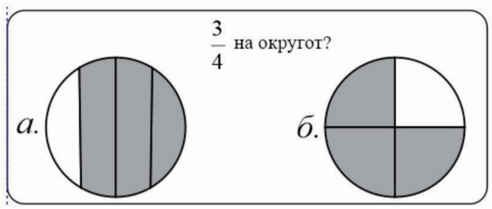
1. На колку еднакви делови е поделена фигурата?: _________
2. Колку делови се обоени? ________
3. Како можеме да го означиме? __________

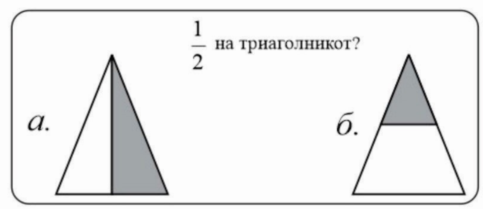
$$\frac{3}{10}$$

броител (покажува колку делови се земени, се разликуваат)

именител (означува на колку еднакви делови е поделена големината)

Задача. Во кој случај е обоен онолку дел од сликата колку што претставува дропка:





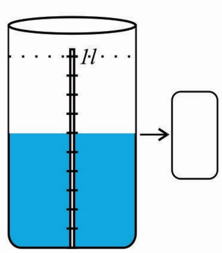
Задача. Прочитајте ја и запишете ја дропката:

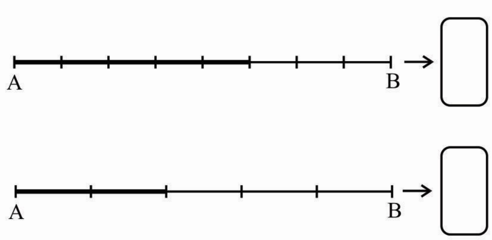
$\frac{3}{8}$ - Три____

$\frac{5}{12}$ - ____

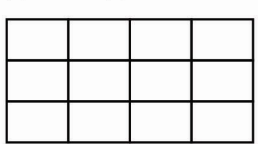
Напиши дропки што има броител 5, именител 7 ____ ; именител 11, броител 6 _____

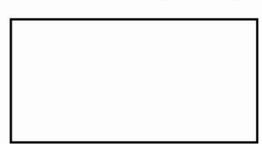
Задача. Напиши дропки што го претставуваат издвоениот дел на сликите:

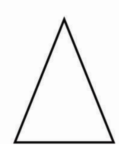




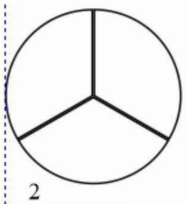
Задача. Поделете ги и обојте ги деловите што ги прикажуваат дропките:

 $\frac{5}{12}$

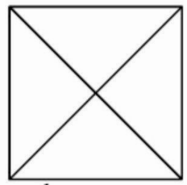
 $\frac{3}{4}$

 $\frac{1}{2}$

Задача. Обојте (подвлечете или означете) онолку делови колку што бараат дропките:

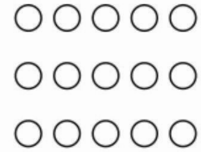


$\frac{2}{3}$ од кругот



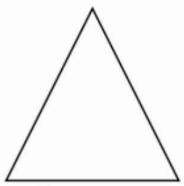
$\frac{1}{4}$ од квадратот

$\frac{1}{2}$ од отсечката

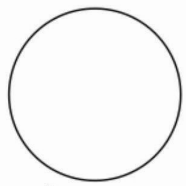


$\frac{3}{5}$ од круговите

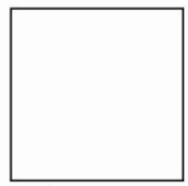
Задача. Поделете и обојте онолку делови колку што бараат дропките:



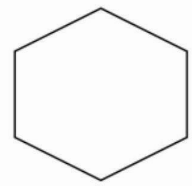
$\frac{1}{2}$ од фигурата



$\frac{3}{4}$ од фигурата



$\frac{1}{3}$ од фигурата



$\frac{1}{4}$ од фигурата

Задача. Знаеме дека 1 евро има 100 центи, па колку центи претставуваат:

$\frac{1}{2}$ од 1 евро = ______ центи, $\frac{1}{4}$ од 1 евро = _____ центи,

$\frac{7}{10}$ од 1 евро =_____ центи.

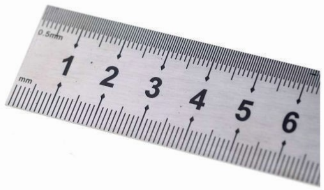
Задача. Знаеме дека неделата има 7 дена: понеделник, вторник, среда, четврток, петок, сабота и недела. Потоа:

$\frac{1}{7}$ од неделата =______ дена; $\frac{3}{7}$ од неделата =______ дена; $\frac{}{7}$ од неделата = 5 дена.

Задача. Знаеме дека 1 кг има 1 000 грама, тогаш:

$\frac{3}{5}$ од 1 kg =______ g $\frac{1}{2}$ од 1 kg = ______ g

Задача. Знаеме дека 1 метар има 100 цм, тогаш:



$\frac{1}{100}$ од 1 м = _______ цм, $\frac{3}{10}$ од 1 м = ______ цм.

Задача. Знаеме дека 1 час има 60 минути, значи:

$\frac{1}{10}$ од 1ч = _____ мин; $\frac{1}{6}$ од 1ч = ______ мин;

$\frac{1}{4}$ од 1ч =______ мин.

Задача. Ако 1 пакување јајца има 30 јајца, тогаш:

Колку јајца има во $\frac{3}{10}$ пакувањето?

____________ јајце.

Задача. Ера има 20 евра. Таа потроши $\frac{7}{10}$ од нив. Тогаш:

Колку евра потрошила Ера?

______________ €

Прилог. 3. Работен лист за учениците за наставна единица #3/3

Наставна единица: # 3/3. **Дропки кои покажуваат ист дел од целина.**

Покажете дека во случај a или b е обоен $\frac{3}{4}$ од сликата?

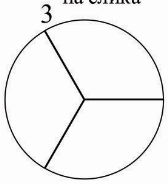
a.  *b.* 

Зошто? ____

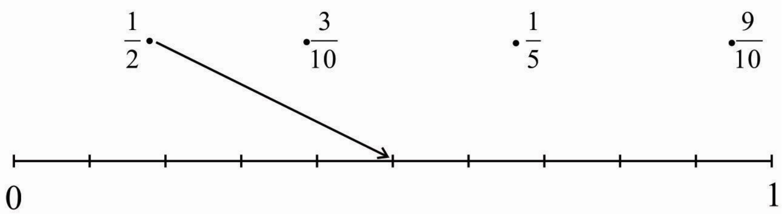
____

Задача. Обојте онолку делови од сликите колку што бараат дропките:

$\frac{2}{3}$ на слика



Поврзете ги дропките со соодветните делови од отсечката



Задача. Во гајбата има 40 јаболка, од кои $\frac{3}{10}$ се кисели јаболка, а другите се слатки.

Колку кисели и колку слатки јаболка има во гајбата:

Кисели _______________ јаболка.

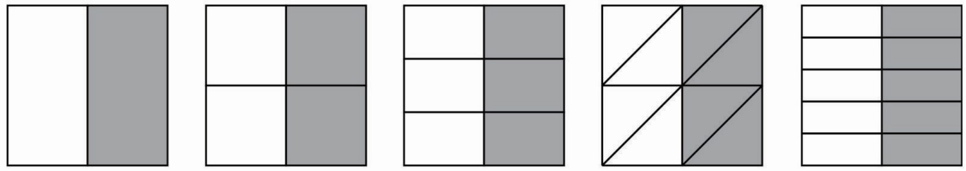
Слатки ______________ јаболка.

Задача. Беса собра 45 цвеќиња. Со $\frac{5}{9}$ од нив направила венец. Колку цвеќиња употреби за круната, а уште колку цвеќиња користеше Беса?

За круната користеше __________ цвеќиња.

Ѝ останаа уште _______________ цвеќиња.

Задача. Погледнете ги фигурите подолу:



$\frac{1}{2}$ $\qquad$ $\frac{\ }{4}$ $\qquad$ $\frac{3}{\ }$ $\qquad$ $\frac{\ }{\ }$ $\qquad$ $\frac{\ }{\ }$

Што забележуваме овде? ____

____

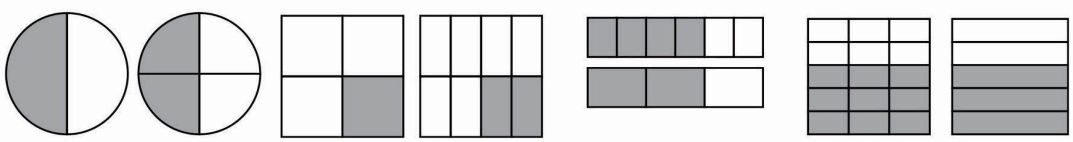
Колкава големина на сликата претставуваат дропките $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \frac{5}{10}$ ___________

____

Дропките $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \frac{5}{10}$ иако се пишуваат и се читаат различно, тие укажуваат на еднакви големини.

Значи, $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}$, $\qquad$ $\frac{1}{2}=\frac{3}{\ }$, $\qquad$ $\frac{1}{2}=\frac{\ }{8}$, $\qquad$ $\frac{1}{2}=\frac{\ }{\ }$ $\quad$ или $\frac{1}{2}=\frac{\ }{4}=\frac{3}{\ }=\frac{\ }{\ }=\frac{\ }{\ }$.

Задача. Погледнете ги фигурите:



$\frac{1}{2}=\frac{\ }{4}$ $\qquad$ $\frac{1}{4}=\frac{2}{\ }$ $\qquad$ $\frac{4}{6}=\frac{2}{\ }$ $\qquad$ $\frac{9}{15}=\frac{\ }{5}$

Како може да добиеме од дропка други дропки еднакви на неа?

$$\overset{\cdot 2}{\underset{\cdot 2}{\frac{1}{2}=\frac{2}{4}}} \qquad \overset{\cdot\ }{\underset{\cdot 2}{\frac{1}{4}=\frac{\ }{8}}} \qquad \overset{:2}{\underset{:2}{\frac{4}{6}=\frac{2}{3}}} \qquad \overset{:3}{\underset{:\ }{\frac{9}{15}=\frac{3}{\ }}}$$

Ако ги помножиме или ги поделиме броителот и именителот на дропката со ист број, добиваме други дропки еднакви на дадената дропка.

Задача. Пополнете:

$\frac{1}{3} = \frac{2}{\ } = \frac{\ \ }{12} = \frac{5}{\ }$ $\qquad$ $\frac{3}{4} = \frac{\ }{8} = \frac{15}{\ \ } = \frac{\ \ }{24}$ $\qquad$ $\frac{7}{9} = \frac{\ \ }{18} = \frac{35}{\ \ } = \frac{\ \ }{90}$

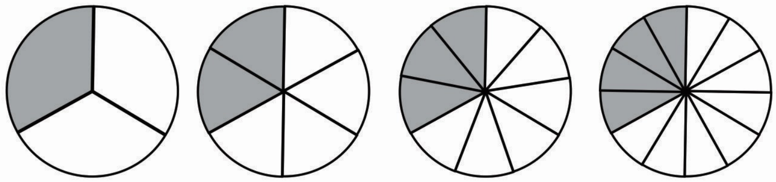
Задача. Запишете ги броевите што недостасуваат така што дропките да бидат еднакви:

$\frac{2}{3} = \frac{\ }{6} = \frac{6}{\ } = \frac{\ }{\ } = \frac{\ }{\ }$ $\qquad$ $\frac{3}{4} = \frac{\ }{8} = \frac{12}{\ \ } = \frac{\ }{\ } = \frac{\ }{\ }$ $\qquad$ $\frac{5}{7} = \frac{\ \ }{14} = \frac{15}{12} = \frac{\ }{\ } = \frac{\ }{\ }$

Прилог. 4. Работен лист за учениците за наставна единица #3/4

Наставна единици: # 3/4. **Споредба на дропки.**

Задача. Што забележуваме од овие фигури?



$$\frac{1}{3} = \frac{2}{\_} = \frac{\_}{9} = \frac{\_}{\_}$$

Имаме дропки кои иако се пишуваат и читаат различно, претставуваат еднакви големини, значи тие се еднакви дропки.

$$\text{Значи, } \frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \frac{4}{12}$$

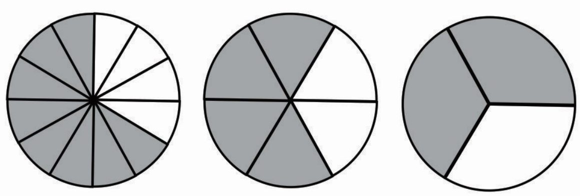
Како добиваме еднакви дропки со дадената дропка?

$$\frac{1}{3} \underset{\times 2}{\overset{\times 2}{=}} \frac{\_}{6} \qquad \frac{1}{3} \underset{\times 3}{\overset{\times 3}{=}} \frac{3}{\_}$$

Задача. Најдете го броителот или именителот на дропките:

$$\frac{1}{4} = \frac{\_}{12} \qquad \frac{2}{3} = \frac{\_}{9} \qquad \frac{1}{5} = \frac{\_}{10} \qquad \frac{1}{6} = \frac{3}{\_} \qquad \frac{3}{5} = \frac{6}{\_} \qquad \frac{3}{4} = \frac{\_}{8}$$

Задача: Да ги видиме фигурите:



$$\frac{8}{12} = \frac{\_}{6} = \frac{2}{\_}$$

Како добиваме еднакви дропки со дадената дропка:

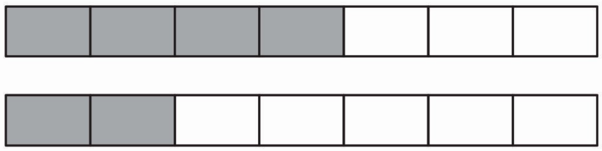
$$\frac{8}{12} \underset{:2}{\overset{:2}{=}} \frac{\_}{6} \qquad \frac{8}{12} \underset{:3}{\overset{:3}{=}} \frac{2}{\_}$$

Задача. Најдете го броителот или именителот на дропките:

$$\frac{8}{10} = \frac{\_}{5} \qquad \frac{4}{8} = \frac{\_}{2} \qquad \frac{6}{9} = \frac{2}{\_} \qquad \frac{9}{12} = \frac{3}{\_} \qquad \frac{10}{12} = \frac{5}{\_}$$

Задача: Да ги видиме фигурите:

a.

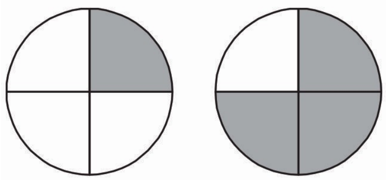


$\frac{4}{7}$

$\frac{2}{7}$

Што може да кажеме за именителот на овие две дропки? ________________________
Која дропка е најголема, а која е најмала?

$$\frac{4}{7} > \frac{\quad}{7} \qquad \text{или} \qquad \frac{2}{7} < \frac{4}{\quad}$$



$$\frac{1}{4} < \frac{\quad}{4} \qquad \text{или} \qquad \frac{3}{4} > \frac{\quad}{4}$$

Значи, споредуваме дропки со ист именител.

Може ли да покажеме дека меѓу две дропки со ист именител една е поголема, а една е помала:

- Меѓу две дропки со ист именител, поголема е онаа ______________________

____

- Меѓу две дропки со ист именител, помала е онаа ______________________

____

Задача. Да ги видиме фигурите:

a.

$\frac{1}{2}$

$\frac{1}{3}$

$$\frac{1}{2} > \frac{1}{3} \qquad \frac{1}{3} < \frac{1}{2}$$

b.

$\frac{2}{5}$

$\frac{2}{3}$

$$\frac{2}{5} < \frac{2}{3} \qquad \frac{2}{3} > \frac{2}{5}$$

Значи споредуваме дропки со ист броител.

Може ли да покажеме дека меѓу две дропки со ист броител една е поголема, а една е помала:

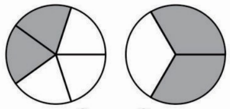
- Меѓу две дропки со ист броител, поголема е онаа ________________________

____

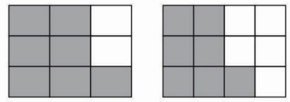
- Меѓу две дропки со ист броител, помала е онаа ___________________________

____

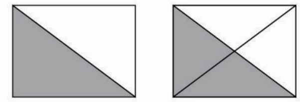
Задача. Поставете еден од симболите >, <, = меѓу дропките:



$\frac{2}{5}$ ___ $\frac{2}{3}$



$\frac{7}{9}$ ___ $\frac{7}{12}$



$\frac{1}{2}$ ___ $\frac{2}{4}$

Задача. Поставете еден од симболите >, <, = меѓу дропките:

a. $\frac{1}{3}$ ___ $\frac{1}{3}$ $\frac{3}{7}$ ___ $\frac{1}{7}$ $\frac{7}{9}$ ___ $\frac{3}{9}$

b. $\frac{2}{3}$ ___ $\frac{2}{5}$ $\frac{4}{7}$ ___ $\frac{4}{9}$ $\frac{3}{6}$ ___ $\frac{3}{5}$

Задача. Подреди ги дропките од најмали до најголеми:

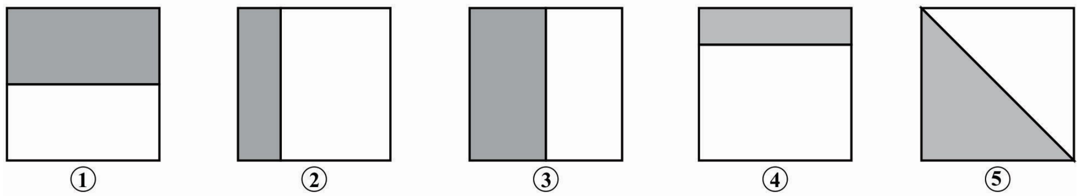
$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{10}$ ______________________

$\frac{7}{9}, \frac{5}{9}, \frac{2}{9}, \frac{4}{9}$ ______________________

Прилог. 5. Работен лист за учениците за наставна единица #4/1

Наставна единица: #4/1. **Дропки, нивното значење.**

Погледнете ги внимателно сликите. Што може да кажеме за нивната поделба?



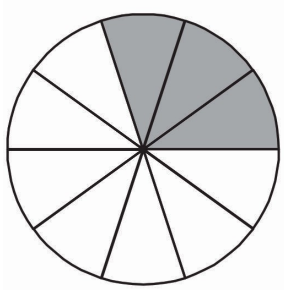
Како се поделени фигурите? ____

____

Како се поделени фигурите 1, 3 и 5? ____

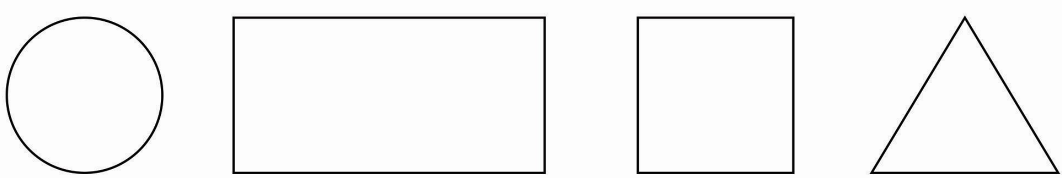
А фигурите 2 и 4? ____

Задача. Да ја видиме фигурата:



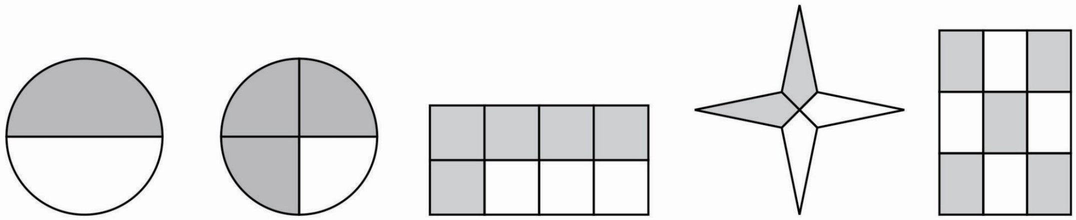
1. На колку еднакви делови е поделен кругот? ___________
2. Од овие 10 еднакви делови се обоени __________ делови.
3. Не се обоени ______________________ делови.

Задача. Поделете ги дадените фигури на онолку еднакви делови колку се бара:



2 еднакви делови **3 еднакви делови** **4 еднакви делови** **2 еднакви делови**

Задача. Погледнете ги сликите:



1 2 3 4 5

Пополнете ја табелата подолу:

Фигури	**На колку еднакви делови е поделена фигурата?**	**Колку делови се обоени?**	**Колку делови не се обоени?**
1	2	1	1
2			
3			
4			

Што може да кажеме за секоја фигура, колку делови од неа се обоени?

На пример, сликата 2 е поделена на 4 дела, 3 од нив се обоени, а потоа запишуваме $\frac{3}{4}$.

Слика 1. ____

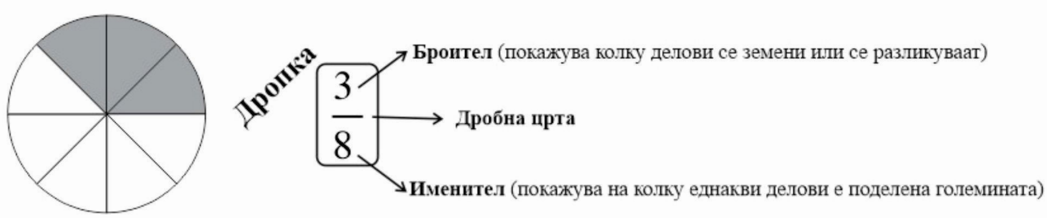
Слика 2. е поделена на 4 дела, 3 од нив се обоени $\frac{3}{4}$.

Слика 3. ____

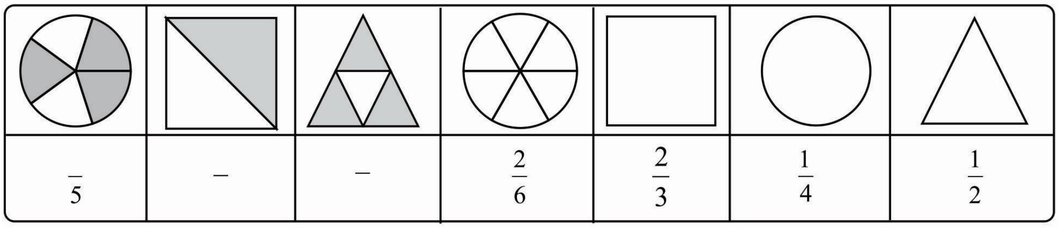
Слика 4. ____

Слика 5. ____

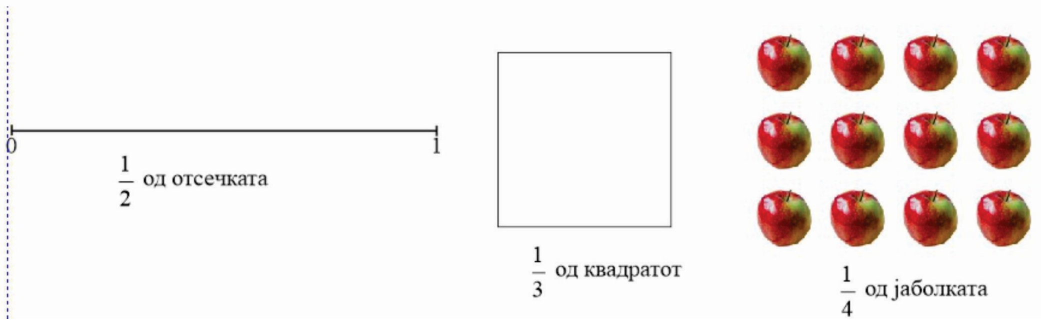
Забелешка: $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{8}, \frac{2}{4}, \frac{5}{9}$ се нарекуват **ДРОПКИ!**



Задача. Пополнете ги барањата и извршете ги бараните дејства на следниов начин:



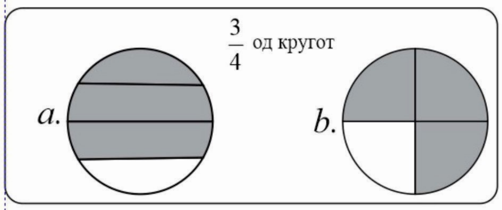
Задача. Разликувајте или обојте онолку делови од сликите колку што бараат дропките:

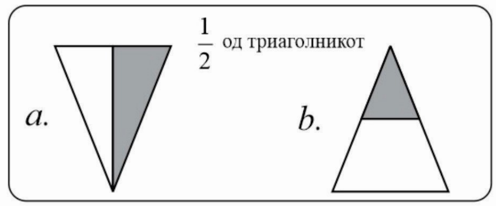


Прилог. 6. Работен лист за учениците за наставна единица #4/2

Наставна единица: #4/2. **Дропки помали од 1 и еднакви на 1.**

1. Покажете во кој случај делот од фигурите е поделен и обоен како што бараат дропките:





Забелешка: Се разгледуваат само случаите кога имаме поделба на целината на еднакви делови.

Задача. Анализирајќи ги сликите, одговорете ги и пополнете ги прашањата и барањата:

Множеството А има 10 елементи. Кажи:
колкав дел од множеството претставуваат:

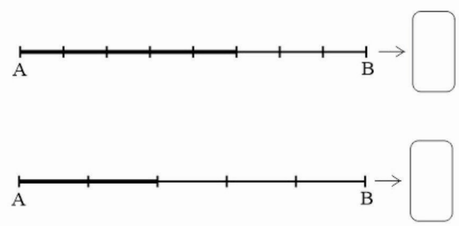
Ѕвезди ___________

Срца ___________

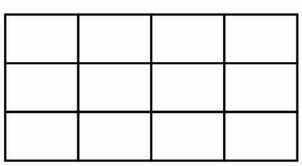
Цвеќиња ________

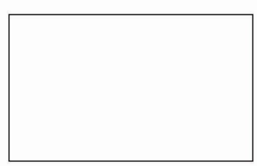
Гулаби __________

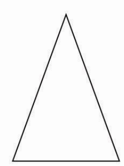
Означете го издвоениот дел од отсечките со дропка:



Задача. Обојте онолку делови од сликите колку што бараат соодветните дропки:

 $\frac{5}{12}$

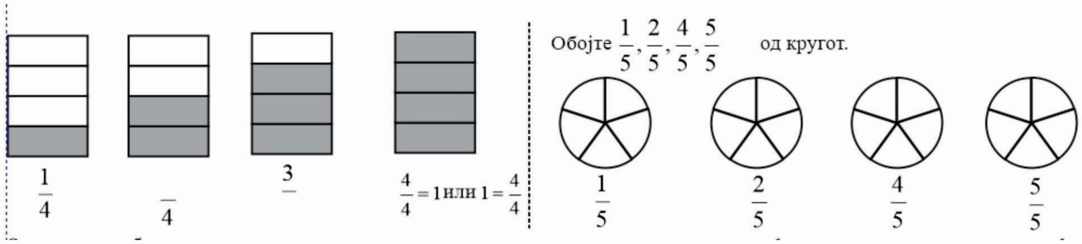
 $\frac{3}{4}$

 $\frac{1}{2}$

Необоените делови од фигурите изразете ги како дропки:

1. $\frac{\quad}{12}$ 2. $\frac{1}{\quad}$ 3. –

Задача. Што може да кажеме за дропките и за големините што ги прикажуваат тие?



Од сликите забележуваме дека имаме дропки кои претставуваат големина помала од 1 и некои големини еднакви на 1.

$$\text{Значи, } \begin{array}{l} \frac{1}{4}<1,\ \frac{2}{4}<1,\ \frac{3}{4}<1 \\ \frac{1}{5}<1,\ \frac{2}{5}<1,\ \frac{3}{5}<1,\ \frac{4}{5}<1 \end{array}$$

Кога дропката е помала од 1?

____

____

Што може да кажеме за дропките $\frac{4}{4}$ или $\frac{5}{5}$?

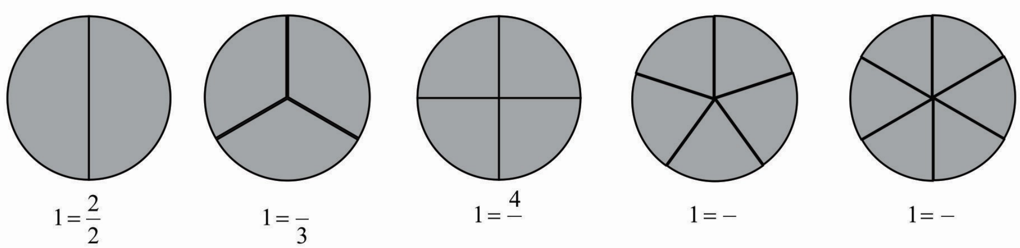
$$\text{Значи, дропката } \frac{4}{4}=1 \text{ или } \frac{5}{5}=1.$$

Кога дропката е еднаква на 1?

____

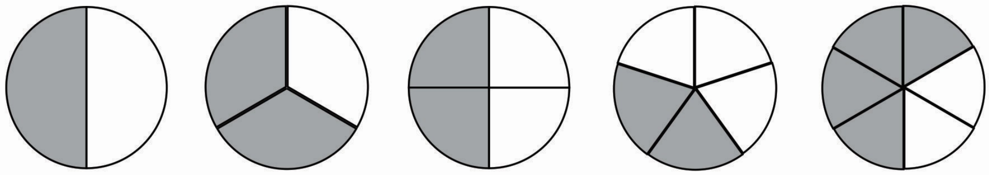
____

Задача. Ги анализираме фигурите:



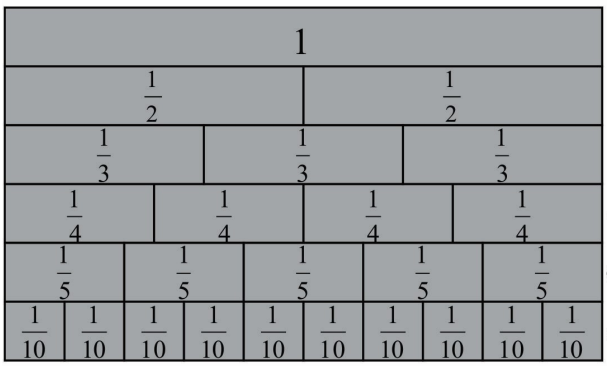
$$\text{Значи, } 1=\frac{2}{2}=\frac{3}{-}=\frac{-}{4}=-=-$$

Задача. Погледнете ги внимателно сликите. Уште колку делови треба да завршат како 1 целосна големина?



$1=\frac{1}{2}+\frac{\ }{\ }$ $\quad$ $1=\frac{2}{3}+\frac{\ }{\ }$ $\quad$ $1=\frac{2}{4}+\frac{\ }{\ }$ $\quad$ $1=\frac{2}{5}+\frac{\ }{\ }$ $\quad$ $1=\frac{4}{6}+\frac{\ }{\ }$

Задача. Што забележуваме од сликата подолу?



1

Овде имаме 2 од $\frac{1}{2}$ или $\frac{2}{2}$

Овде имаме 3 од $\frac{1}{3}$ или $\frac{3}{3}$

Овде имаме 4 од $\frac{1}{4}$ или $\frac{4}{4}$

Овде имаме 5 од $\frac{1}{5}$ или $\frac{5}{5}$

Овде имаме 10 од $\frac{1}{10}$ или $\frac{10}{10}$

$1=\frac{2}{2}=\frac{3}{3}=\frac{4}{4}=\frac{5}{5}=\frac{10}{10}$

$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\frac{1}{10}<1$

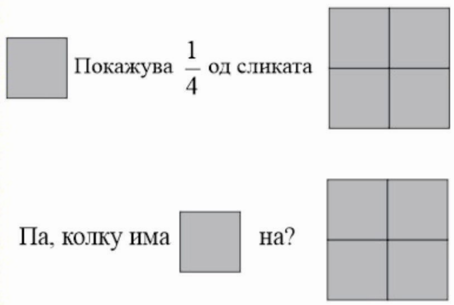
Значи, $1=\frac{2}{2}=\frac{3}{\ }=\frac{4}{\ }=\frac{\ }{\ }=\frac{\ }{\ }$ $\qquad$ и $\qquad$ $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\frac{1}{10}<1$.

Прилог. 7. Работен лист за учениците за наставна единица #4/3

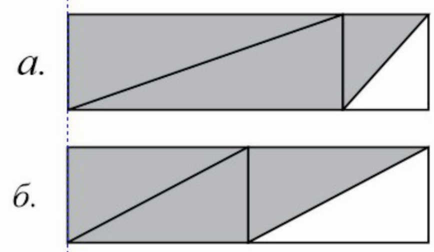
Наставна единица: #4/3. **Дропка, како дел од број.**

Задача. Ајде да разговараме за фигурите подолу. Што забележуваме овде?

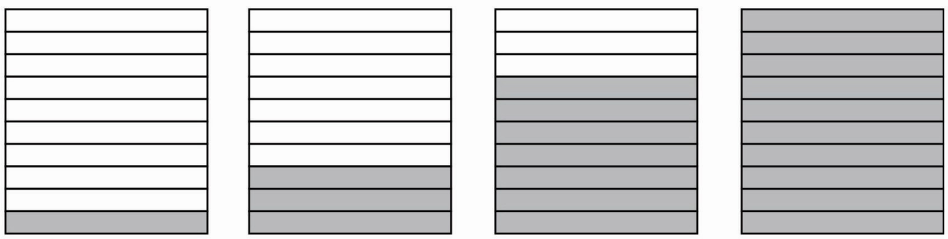
По проверка на домашната задача, на учениците им ги делиме наставните листови подготвени за оваа наставна единица.



Ги замолуваме учениците да го идентификуваат случајот кога обоивме $\frac{3}{4}$ од фигурите?



Задача. Да ги анализираме бројките:



$\frac{1}{10}$ $\qquad \frac{\_\_}{10}$ $\qquad \frac{\_\_}{10}$ $\qquad \frac{\_\_}{10}$

Што забележуваме овде? ____

Значи, $\frac{1}{10}, \frac{3}{10}, \frac{7}{10} < 1$. Додека: $\frac{10}{10} = 1$

Пополнете:

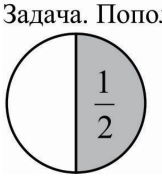
- Дропката е помала од 1, ако ____

____

- Дропката е еднаква со 1, ако ____

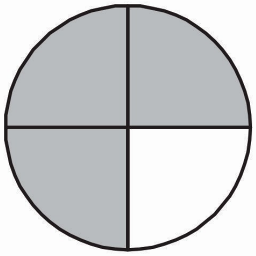
____

Задача. Пополнете:



$1=\frac{1}{2}+\frac{\ }{\ }$ $\quad \frac{1}{3}+\frac{\ }{\ }=1$ $\quad \frac{2}{3}+\frac{\ }{\ }=1$ $\quad 1=\frac{3}{7}+\frac{\ }{\ }$ $\quad \frac{\ }{\ }+\frac{6}{11}=1$ $\quad \frac{\ }{\ }+\frac{5}{9}=1$

Да ги анализираме, уште еднаш, елементите на дропката:



$\frac{3}{4}$

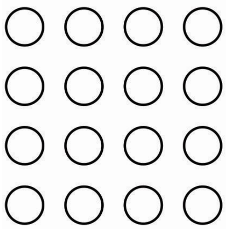
$3 \rightarrow$ **Броител,** покажува_____________________________

____

$4 \rightarrow$ **Именителот,** покажува ________________________

____

Задача. Разликувајте и обојте $\frac{3}{4}$ од 12 кругови на сликата.



Што забележуваме овде? $\frac{3}{4}$ од 12 кругови = ?

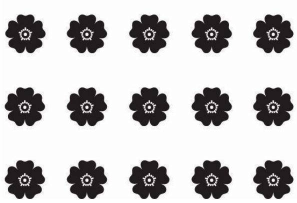
$(12:4)\cdot 3=3\cdot 3=9$

Значи, $\frac{3}{4}$ од 12 кругови претставува 9 кругови.

Објаснете како ги правевте пресметките: ____

____

Задача. Колку цвеќиња претставуваат $\frac{2}{3}$ од сите цвеќиња на сликата?



Колку цвеќиња има на сликата? _________________

$\frac{2}{3}$ од 15 цвеќиња = _____________________?

$(15:3)\cdot 2=5\cdot 2=10$

Задача. Во продавница за овошје има 140 кг овошје. Од нив $\frac{2}{7}$ се јаболка, $\frac{3}{7}$ праски, $\frac{1}{7}$ крушки.

а. Колку кг јаболка има во продавницата? ______________________________

б. Колку кг праски има во продавницата? ______________________________

в. Колку кг круши има во продавницата? ______________________________

г. Дали има друго овошје во продавницата? ___________________________

Задача. Пресметајте:

1 година има 12 месеци, тогаш $\frac{1}{3}$ од 1 год. = ________________________________ месеци.

1 месец има 30 дена, тогаш $\frac{3}{5}$ од 1 месец = ___________________________________ дена.

1 км има 1 000 м, тогаш $\frac{7}{20}$ од 1 км = ____ m.

1 евро има 100 центи, тогаш $\frac{7}{10}$ од 1 € = _____________________________________ центи.

Задача. Блина имала 80 евра. Потрошила $\frac{5}{8}$ од нив. Колку евра ѝ останале на Блина?

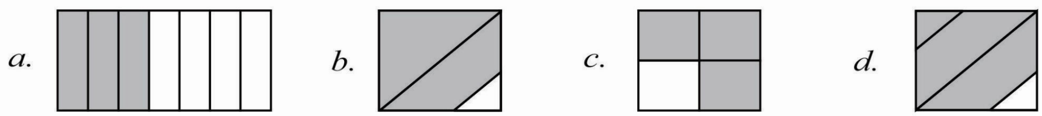
Задача. Пресметајте:

$\frac{2}{5}$ од 25 = ______ $\frac{4}{7}$ од 28 = _____ $\frac{7}{10}$ од 60 = ______

Прилог. 8. Работен лист за учениците за наставна единица #4/4

Наставна единица: #4/4. **Споредба на дропки.**

На која од фигурите е обоена $\frac{3}{4}$ од фигурите?



Објаснете ____

Задача. Мира, Мелоси и Мелина купиле пица со иста форма и големина.

Така, забележуваме дека трите изеле еднакви делови од пицата.

Значи, $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9}$

Како добиваме дропки еднакви на дадената дропка?

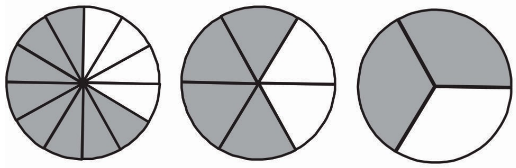
$$\frac{1}{3} \underset{\cdot 2}{\overset{\cdot 2}{=}} \frac{\quad}{6} \qquad \frac{1}{3} \underset{\cdot 3}{\overset{\cdot 3}{=}} \frac{3}{\quad}$$

Еднакви дропки на дадената дропка може да се добијат со ___________________________   ____

Задача. Напиши го броителот или именителот на дропките:

$\frac{1}{4} = \frac{\quad}{12}$ $\qquad$ $\frac{2}{3} = \frac{\quad}{9}$ $\qquad$ $\frac{1}{5} = \frac{\quad}{10}$ $\qquad$ $\frac{1}{6} = \frac{3}{\quad}$ $\qquad$ $\frac{3}{5} = \frac{6}{\quad}$ $\qquad$ $\frac{3}{4} = \frac{15}{\quad}$

Задача. Да ја видиме сликата:



$$\frac{8}{12} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$\underset{:2}{\overset{:2}{\frac{8}{12} = \frac{\ }{6}}} \qquad \underset{:3}{\overset{:3}{\frac{8}{12} = \frac{2}{\ }}}$$

Како добиваме еднакви дропки на дадената дропка?

Дропки еднакви на дадената дропка може да се добијат со ___________________________ ____

Задача. Напишете го броителот или именителот на дропките:

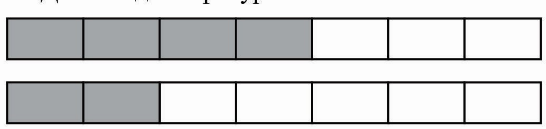
$\frac{8}{10} = \frac{\ }{5}$ $\qquad$ $\frac{4}{8} = \frac{\ }{2}$ $\qquad$ $\frac{6}{9} = \frac{\ }{3}$ $\qquad$ $\frac{9}{12} = \frac{3}{\ }$ $\qquad$ $\frac{10}{12} = \frac{5}{\ }$

Задача. Пресметај:

$\frac{1}{3}$ на $12 =$ ____ $\qquad$ $\frac{2}{5}$ на $20 =$ ____ $\qquad$ $\frac{5}{6}$ на $36 =$ ____ $\qquad$ $\frac{7}{10}$ на $70 =$ ____

Задача. Да ги видиме фигурите:

а.



$\frac{4}{7}$

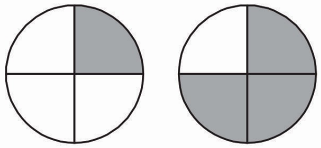
$\frac{2}{7}$

Што забележуваме од овие фигури?

Што имаат заедничко овие дропки $\frac{4}{7}$ и $\frac{2}{7}$?

$\frac{4}{7}$ претставува поголема големина од $\frac{2}{7}$, или $\frac{2}{7}$ претставува помала големина од $\frac{4}{7}$.

$$\frac{4}{7} > \frac{2}{7} \text{ или } \frac{2}{7} < \frac{4}{7}$$

b. 

$\frac{1}{4}$ $\frac{3}{4}$

а. $\frac{1}{4}$ претставува помала големина од $\frac{3}{4}$ или $\frac{3}{4}$ претставува поголема големина од $\frac{1}{4}$.

$$\frac{1}{4} < \frac{3}{4} \quad \text{или} \quad \frac{3}{4} > \frac{1}{4}$$

ЗОШТО?

Значи, тука имаме дропки со ист именител.

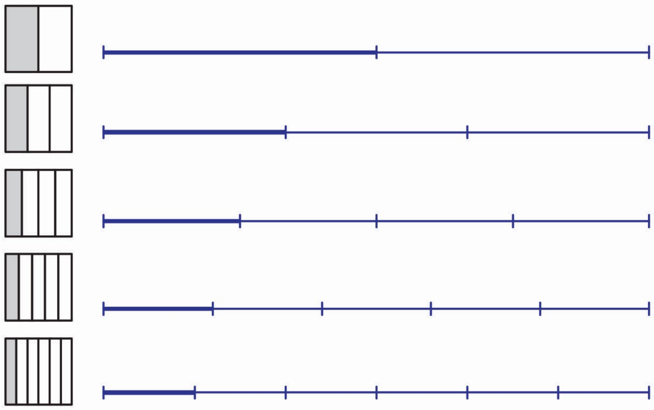
Меѓу две дропки со ист именител, поголема е ________________________________

____

Меѓу две дропки со ист именител, помала е ____________________________________

____

Задача. Да ги анализираме фигурите подолу:



Од сликата забележуваме:

$$\frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \frac{1}{5} > \frac{1}{6}$$

или

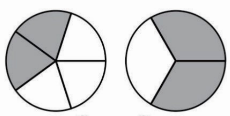
$$\frac{1}{6} < \frac{1}{5} < \frac{}{4} < \frac{1}{} < \frac{}{2}$$

Значи, тука имаме дропки со ист броител:

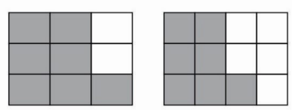
Меѓу две дропки со ист броител, поголема е ____________________________________
____

Меѓу две дропки со ист броител, помала е ______________________________________
____

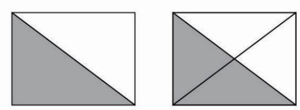
Задача. Кој од симболите >, <, = треба да се стави меѓу дропките:



$\frac{2}{5}$ ___ $\frac{2}{3}$



$\frac{7}{9}$ ___ $\frac{7}{12}$



$\frac{1}{2}$ ___ $\frac{2}{4}$

Задача. Кој од симболите >, <, = треба да се стави меѓу дропките:

a. $\frac{1}{3}$ ___ $\frac{1}{3}$ $\frac{3}{7}$ ___ $\frac{1}{7}$ $\frac{7}{9}$ ___ $\frac{3}{9}$

b. $\frac{2}{3}$ ___ $\frac{2}{5}$ $\frac{4}{7}$ ___ $\frac{4}{9}$ $\frac{3}{6}$ ___ $\frac{3}{5}$

Задача. Подреди ги дропките од најмали до најголеми:

$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{10}$ ________________________

$\frac{7}{9}, \frac{5}{9}, \frac{2}{9}, \frac{4}{9}$ ________________________

Прилог. 9. Работен лист за учениците за наставна единица #4/5

Наставна единица: #4/5. **Собирање и одземање на дропки со ист именител.**

Поделете и обојте на два различни начини $\frac{1}{4}$ на правоаголникот.

a.  *b.* 

Задача. Колку претставуваат (пресметај):

$\frac{2}{3}$ од $9 =$ ______; $\frac{3}{5}$ од $20 =$ ______; $\frac{7}{10}$ од $30 =$ ______

Задача. Изедначете ги дропките:

$$\frac{1}{7} = \frac{1\cdot 3}{7\cdot} = \frac{}{} \qquad \frac{4}{10} = \frac{4:2}{10:} = \frac{}{} \qquad \frac{1}{5} = \frac{}{10}$$

$$\frac{1}{7} = \frac{1\cdot}{7\cdot 4} = \frac{}{} \qquad \frac{6}{21} = \frac{6:}{21:3} = \frac{}{} \qquad \frac{15}{20} = \frac{3}{}$$

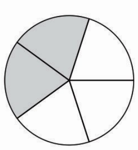
Задача. Поставете еден од симболите: >, <, = меѓу дропките:

$\frac{6}{7}$ ___ $\frac{5}{7}$ $\qquad$ $\frac{2}{11}$ ___ $\frac{6}{11}$ $\qquad$ $\frac{7}{10}$ ___ $\frac{7}{8}$ $\qquad$ $\frac{1}{29}$ ___ $\frac{1}{25}$

Задача. Подреди ги дропките од најмали до најголеми:

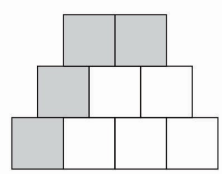
$$\frac{2}{11}, \frac{5}{11}, \frac{3}{11}, \frac{7}{11} \rightarrow \frac{2}{11} < \frac{}{11} < \frac{}{11} < \frac{}{} \qquad \frac{3}{7}, \frac{3}{11}, \frac{3}{8}, \frac{3}{10} \rightarrow \frac{3}{11} < \frac{3}{} < \frac{3}{} < \frac{}{}$$

Задача. Гледајќи ги сликите, пополнете со дропките што недостасуваат:



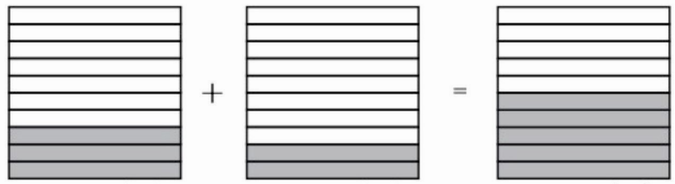
$1 = \frac{2}{5} + \frac{}{}$

$1 = \frac{3}{8} + \frac{}{}$



$1 = \frac{}{} + \frac{4}{11}$

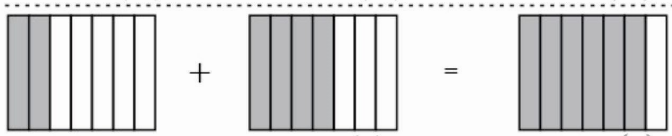
Задача. Да ги видиме фигурите:



3 од $\frac{1}{10} \rightarrow \left(\frac{3}{10}\right)$ $\quad$ 2 од $\frac{1}{10} \rightarrow \left(\frac{2}{10}\right)$ $\quad$ 5 од $\frac{1}{10} \rightarrow \left(\frac{5}{10}\right)$

$$\frac{3}{10}+\frac{\quad}{10}=\frac{\quad+\quad}{10}=\frac{\quad}{10}$$

Соберете слично како погоре:



2 од $\frac{1}{7} \rightarrow \left(\frac{2}{7}\right)$ $\quad$ 4 од $\frac{1}{7} \rightarrow \left(\frac{4}{7}\right)$ $\quad$ 6 од $\frac{1}{7} \rightarrow \left(\frac{6}{7}\right)$

$$\frac{2}{7}+$$

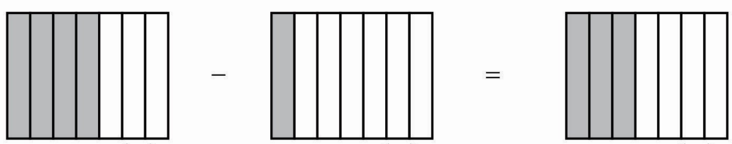
Овде имаме собирање дропки со ист именител.

Како да се соберат дропки со ист именител?

Дропките со ист именител се собираат вака: ____

____

Задача. Да ги видиме фигурите:



4 од $\frac{1}{7} \rightarrow \left(\frac{4}{7}\right)$ $\quad$ 1 од $\frac{1}{7} \rightarrow \left(\frac{1}{7}\right)$ $\quad$ 3 од $\frac{1}{7} \rightarrow \left(\frac{3}{7}\right)$

$$\frac{4}{7}-\frac{1}{7}=\frac{4-\quad}{7}=\frac{\quad}{7}$$

Овде одземаме дропки со ист именител.

Како се одземаат дропки со ист именител?

Дропките со ист именител се одземаат вака: ____

____

Задача. Собери ги дропките со ист именител:

$$\frac{3}{5}+\frac{1}{5}=\frac{3+1}{4}=-$$

$$\frac{2}{9}+\frac{4}{9}=\frac{2+}{9}=-$$

$$\frac{3}{10}+\frac{4}{10}=\frac{\qquad}{10}=-$$

$$\frac{3}{7}+\frac{1}{7}+\frac{2}{7}=$$

Задача. Изведете ги бараните операции со дропки:

$$\frac{5}{11}-\frac{2}{11}=\frac{5-}{11}=-$$

$$\frac{13}{15}-\frac{8}{15}=\frac{\qquad}{15}=-$$

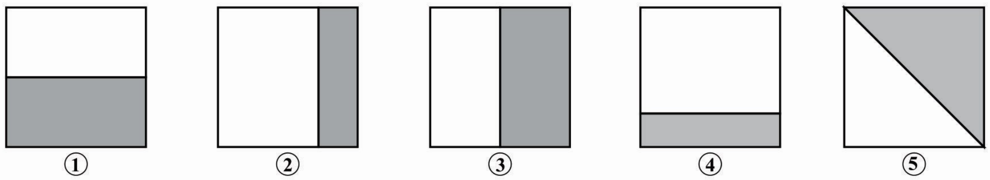
$$\frac{9}{10}-\frac{7}{10}+\frac{1}{10}=\frac{9-7+1}{\qquad}=-$$

$$\frac{13}{23}-\frac{5}{23}-\frac{9}{23}=$$

Прилог. 10. Работен лист за учениците за наставна единица #5/1

Наставна единица: #5/1. **Дропки, нивното значење.**

Погледнете ги внимателно сликите. Што може да кажеме за нивната поделба?



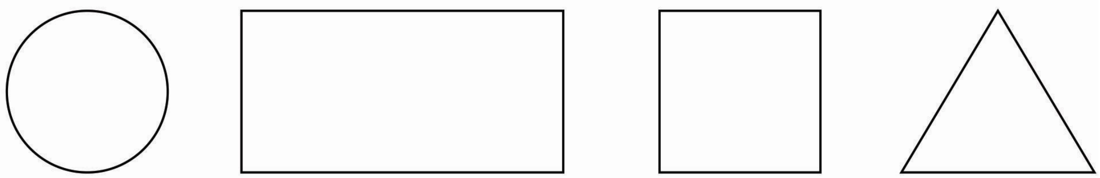
Како се поделени фигурите? ____

____

Како се поделени фигурите 1, 3 и 5? ____

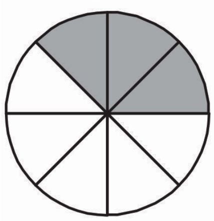
А фигурите 2 и 4? ____

Задача. Поделете ги дадените фигури на онолку еднакви делови колку што е потребно:



2 еднакви делови **3 еднакви делови** **4 еднакви делови** **2 еднакви делови**

Задача.



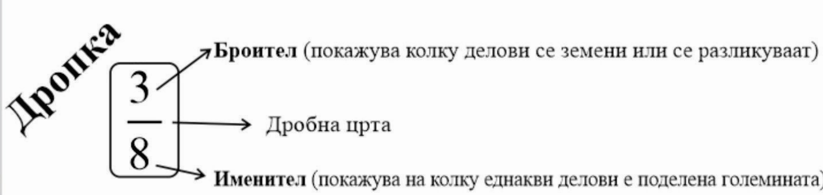
1. На колку еднакви делови е поделена кружницата? _____ делови
2. Колку делови се обоени? ___________
3. Колку делови се необоени? _________

Како да ги прикажеме обоените и необоените делови од фигурите?

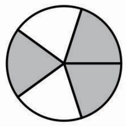
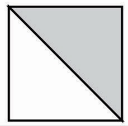
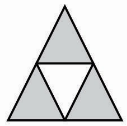
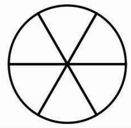
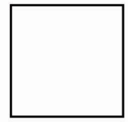
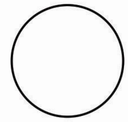
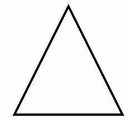
Изразите

$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{8}, \frac{2}{4}, \frac{5}{9}$

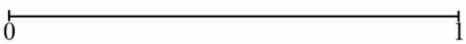
се нарекуваат ДРОПКИ.



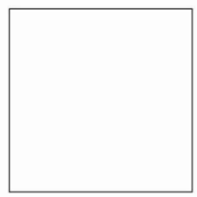
Задача. Пополнете ја табелата:

						
$\frac{\ }{5}$	–	–	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

Задача. Разликувајте ги или обојте ги деловите од сликите онолку колку што покажуваат дропките:



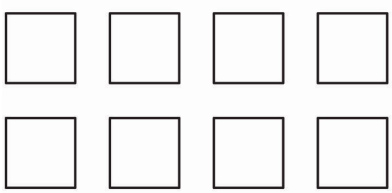
$\frac{1}{2}$ од отсечката



$\frac{1}{3}$ од квадратот

$\frac{1}{4}$ од јаболката

Задача. Разликувајте или обојте $\frac{1}{4}$ од 8 квадрати на сликата:



$\frac{1}{4}$ од 8 квадрати = __________ квадрати.

Објаснете ги пресметките ________________________

____

Задача. Задача. Разликувајте и обојте $\frac{2}{3}$ од ѕвездите на сликата:

$\frac{2}{3}$ од 15 ѕвезди = __________ ѕвезди.

Објаснете ги пресметките: _______________

____

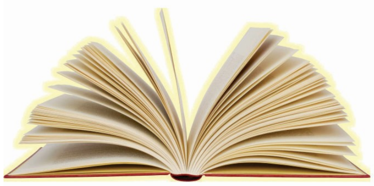
Задача. Линдрит има 35 евра од кои потрошил $\frac{4}{7}$. Колку € има непотрошено Линдрит?

Пресметај:

Линдрит потрошил $\frac{4}{7}$ од 35 € =______________ €

На Линдрит му останаа уште _____________€

Задача. Ринеса чита книга од 150 страници. Досега прочитала $\frac{7}{10}$ од книгата. Уште колку страници треба да прочита?



Пресметај:

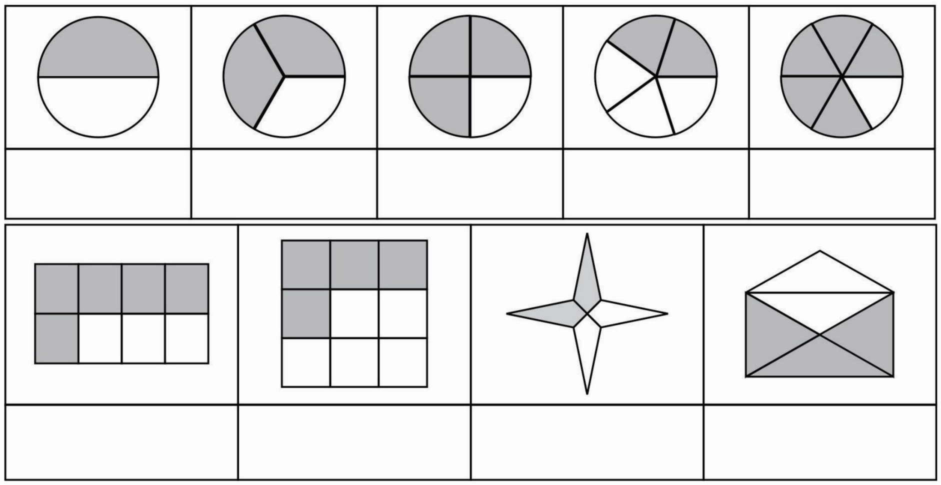
Ринеса прочитала $\frac{7}{10}$ од 150 стр. = _____________.

Ринеса треба да прочита уште ____ страна.

Прилог. 11. Работен лист за учениците за наставна единица #5/2

Наставна единица: #5/2. **Споредба на дропки.**

Претстави ги со помош на дропки обоените делови од фигурите?



Задача. Во пакувањето има 20 бонбони од кои $\frac{2}{5}$ ѝ дадов на другарка ми. Можеш ли да ми кажеш уште колку бонбони има во пакувањето?

На мојата другарка ѝ дадов $\frac{2}{5}$ од 20 бонбони = _________ бонбони.

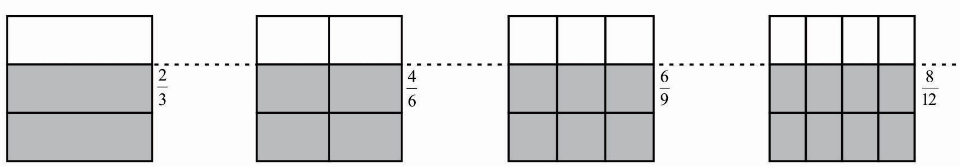
Ми останаа уште 20 бонбони - ___________ = _______________бонбони.

Задача. Пресметај:

$\frac{1}{10}$ од 1 м =_____ цм $\quad$ $\frac{5}{12}$ од 1 часа =______ мин. $\quad$ $\frac{3}{5}$ од 1 kg =______ g

$\frac{9}{20}$ од 1 евро =______ центи $\quad$ $\frac{3}{4}$ од 1 год. =____ месеци $\quad$ $\frac{2}{7}$ од 1 нед. =___ дена

Задача. Да ги видиме сликите:



Што забележуваме овде? ____

____

Значи, дропки $\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \frac{8}{12}$ претставуваат ист дел од големината.

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{8}{12}$$

Како да се добијат еднакви дропки на дадена дропка?

$$\frac{2}{3} \xrightarrow{\cdot 2} \frac{4}{6}, \quad \frac{2}{3} \xrightarrow{\cdot 3} \frac{6}{9}, \quad \frac{2}{3} \xrightarrow{\cdot 4} \frac{8}{12}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{8}{12}$$

Проширување на дропки.

$$\frac{4}{6} \xrightarrow{:2} \frac{2}{3}, \quad \frac{6}{9} \xrightarrow{:3} \frac{2}{3}, \quad \frac{8}{12} \xrightarrow{:4} \frac{2}{3}$$

$$\frac{4}{6} = \frac{2}{3} \qquad \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \qquad \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

Поедноставување на дропки.

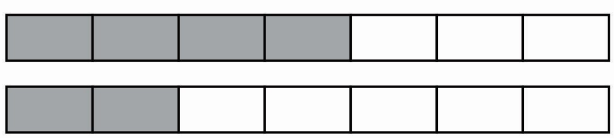
Што подразбираме под **проширување** на дропка? ____________________________________
____

Што подразбираме под **скратување** на дропка? ________________________________
____

Задача. Најдете ги броителот и именителот на дропките што недостасува:

$\frac{4}{5} = \frac{\quad}{10}$ $\qquad$ $\frac{1}{2} = \frac{4}{\quad}$ $\qquad$ $\frac{2}{3} = \frac{\quad}{15}$ $\qquad$ $\frac{9}{12} = \frac{3}{\quad}$ $\qquad$ $\frac{6}{9} = \frac{\quad}{3}$ $\qquad$ $\frac{10}{12} = \frac{5}{\quad}$

Задача. Да ги погледнеме дропките што ги прикажуваат обоените делови на фигурите:



$\frac{4}{7}$

$\frac{2}{7}$

Што имаат заедничко дропките: $\frac{4}{7}$ и $\frac{2}{7}$? ____

$\frac{4}{7}$ претставува големина поголема од $\frac{2}{7}$. Значи, $\frac{4}{7} > \frac{2}{7}$.

$\frac{2}{7}$ претставува големина помала од $\frac{4}{7}$. Значи, $\frac{2}{7} < \frac{4}{7}$.

Помеѓу две дропки со ист именител, кој е поголема, а кој помала?

Помеѓу две дропки со ист именител, поголема е ______________________________________   ____

Помеѓу две дропки со ист именител, помала е ____   ____

Задача. Да ги погледнеме дропките што ги прикажуваат обоените делови на фигурите:

$\frac{1}{2}$ $\quad$ $\frac{1}{3}$ $\quad$ $\frac{1}{4}$ $\quad$ $\frac{1}{5}$ $\quad$ $\frac{1}{6}$

Што имаат заедничко овие дропки $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}$? ________________________________

$\frac{1}{2}$ претставува големина поголема од $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{3}$ претставува големина помала од $\frac{1}{4}$; .....

или:

$\frac{1}{6}$ претставува големина помала од $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{5}$ претставува големина помала од $\frac{1}{4}$; .....

Значи, $\boxed{\frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \frac{1}{5} > \frac{1}{6}}$ или $\boxed{\frac{1}{6} < \frac{1}{5} < \frac{1}{4} < \frac{1}{3} < \frac{1}{2}}$

Задача. Поставете еден од симболите >, <, = меѓу дропки:

a. $\boxed{\frac{1}{3} \_\_ \frac{1}{3} \qquad \frac{3}{7} \_\_ \frac{1}{7} \qquad \frac{7}{9} \_\_ \frac{5}{9}}$ $\qquad$ *b.* $\boxed{\frac{2}{3} \_\_ \frac{2}{5} \qquad \frac{4}{7} \_\_ \frac{4}{9} \qquad \frac{3}{6} \_\_ \frac{3}{5}}$

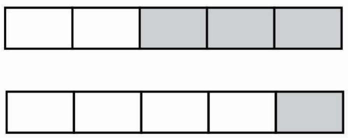
Задача. Подреди ги дропките од најмала до најголема:

$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{10}$ ________________________; $\qquad$ $\frac{7}{9}, \frac{5}{9}, \frac{2}{9}, \frac{4}{9}$ ________________________

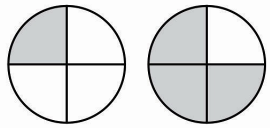
Прилог. 12. Работен лист за учениците за наставна единица #5/3

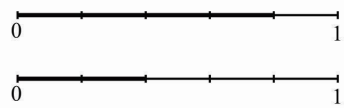
Наставна единица: #5/3. **Собирање и одземање дропки со ист именител.**

Да ги видиме сликите:



$\frac{3}{5}$ $\frac{1}{5}$





$\frac{3}{5} > \frac{1}{5}$ или $\frac{1}{5} < \frac{3}{5}$ $\frac{1}{4} < \frac{3}{4}$ или $\frac{3}{4} > \frac{1}{4}$ $\frac{4}{5} > \frac{2}{5}$ или $\frac{2}{5} < \frac{4}{5}$

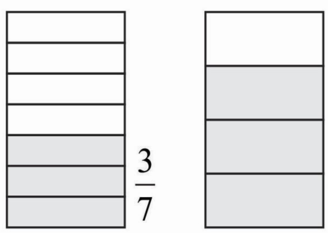
Што имаат заедничко овие дропки? ____

Како се споредуваат две дропки со заеднички именител?

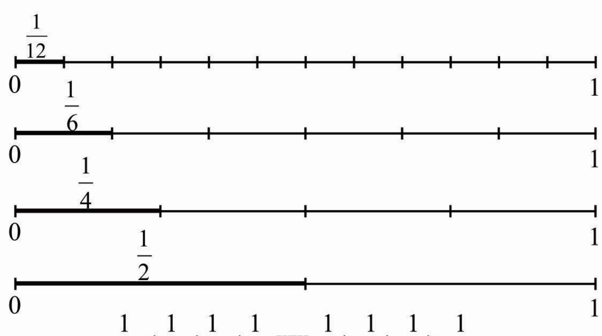
____

____

Да видиме:



$\frac{3}{7}$ $\frac{3}{4}$



$\frac{3}{7} < \frac{3}{4}$ или $\frac{3}{4} > \frac{3}{7}$

ЗОШТО?

$\frac{1}{12} < \frac{1}{6} < \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$ или $\frac{1}{2} > \frac{1}{4} > \frac{1}{6} > \frac{1}{12}$

ЗОШТО?

Што имаат заедничко овие дропки? ____

Како се споредуваат дропките со заеднички именител?

____

____

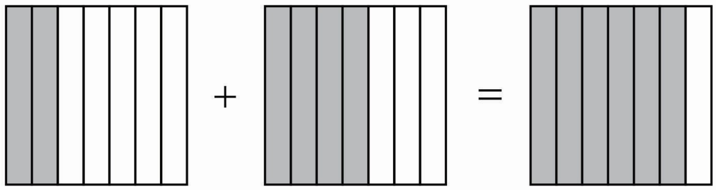
Задача. Поставете еден од симболите >, <, = помеѓу дропките:

$\frac{5}{8}$ ___ $\frac{3}{8}$, $\frac{3}{8}$ ___ $\frac{3}{5}$

Задача. Напиши го броителот или именителот на дропките:

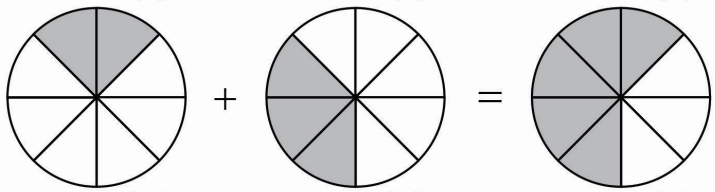
$\frac{3}{8} > \frac{\quad}{8}$ $\qquad$ $\frac{7}{10} > \frac{7}{\quad}$ $\qquad$ $\frac{2}{7} > \frac{\quad}{\quad}$ $\qquad$ $\frac{2}{7} = \frac{4}{\quad}$

Задача. Што забележуваме на овие слики?



2 од $\frac{1}{7} \to \left(\frac{2}{7}\right)$ $\qquad$ 4 од $\frac{1}{7} \to \left(\frac{4}{7}\right)$ $\qquad$ 6 од $\frac{1}{7} \to \left(\frac{6}{7}\right)$

$$\frac{2}{7} + \frac{4}{7} = \frac{6}{7}$$
$$\frac{2}{7} + \frac{4}{7} = \frac{2+4}{7} = \frac{6}{7}$$



2 од $\frac{1}{8} \to \left(\frac{2}{8}\right)$ $\qquad$ 3 од $\frac{1}{8} \to \left(\frac{3}{8}\right)$ $\qquad$ 5 од $\frac{1}{8} \to \left(\frac{5}{8}\right)$

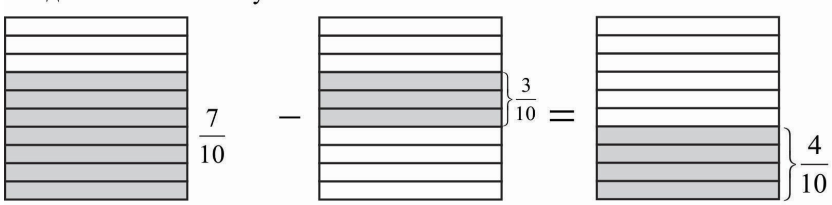
$$\frac{2}{8} + \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$$
$$\frac{2}{8} + \frac{3}{8} = \frac{2+3}{8} = \frac{5}{8}$$

Значи, забележуваме дека овде е илустрирано собирањето дропки со ист именител.

Како се собираат дропки со ист именител?

Дропките со ист именител се собираат вака: ____
____

Задача. Што забележуваме на сликата:



7 од $\frac{1}{10} \to \left(\frac{7}{10}\right)$ $\qquad$ 3 од $\frac{1}{10} \to \left(\frac{3}{10}\right)$ $\qquad$ 4 од $\frac{1}{10} \to \left(\frac{4}{10}\right)$

$$\frac{7}{10} - \frac{3}{10} = \frac{4}{10}$$
$$\frac{7}{10} - \frac{3}{10} = \frac{7-3}{10} = \frac{4}{10}$$

Значи, забележуваме дека овде имаме одземање дропки со ист именител.

Како се одземаат дропки со ист именител?

Дропките со ист именител се одземаат вака: ____________________________________

____

Задача за вежбање. Соберете ги и одземете ги дропките со истите именители дадени подолу::

$\frac{3}{5}+\frac{1}{5}=\frac{3+1}{5}=\frac{}{}$

$\frac{2}{9}+\frac{4}{9}=\frac{2+}{9}=\frac{}{}$

$\frac{3}{10}+\frac{4}{10}=\frac{}{}=\frac{}{}$

$\frac{7}{13}+\frac{1}{13}=\frac{}{}=\frac{}{}$

$\frac{2}{9}+\frac{5}{9}=\frac{2+}{}=\frac{}{}$

$\frac{9}{17}-\frac{4}{17}=\frac{}{}=\frac{}{}$

$\frac{3}{7}+\frac{1}{7}+\frac{2}{7}=\frac{}{}=\frac{}{}$

$\frac{1}{16}+\frac{2}{16}+\frac{5}{16}+\frac{3}{16}=\frac{}{}=\frac{}{}$

$\frac{11}{25}-\frac{9}{25}+\frac{4}{25}=\frac{}{}=\frac{}{}$

Задача. Одземете ги дропките со ист именител:

$\frac{5}{10}-\frac{2}{10}=\frac{5-2}{10}=\frac{}{}$

$\frac{13}{15}-\frac{8}{15}=\frac{13-}{15}=\frac{}{}$

$\frac{9}{17}-\frac{4}{17}=\frac{}{}=\frac{}{}$

$\frac{13}{20}-\frac{9}{20}=\frac{}{}=\frac{}{}$

$\frac{9}{10}-\frac{7}{10}+\frac{1}{10}=\frac{9-7+1}{}=\frac{}{}$

$\frac{17}{20}-\frac{7}{20}+\frac{3}{20}=\frac{}{}=\frac{}{}$

Прилог. 13. Работен лист за учениците за наставна единица #5/4

Наставна единица: #5/4. **Собирање и одземање дропки со различни именители.**

Претходно научивме за множители на броеви или на друг начин за најмалиот заеднички содржател на два или повеќе броеви.

Задача. Да ги погледнеме броевите 4 и 6.

Содржатели на 4 и 6 се:

$C_4 = \{4,8,12,\_\_\_,\_\_\_,\_\_\_,\_\_\_,\_\_\_,\_\_\_,\_\_\_,\_\_\_,...\}$

$C_6 = \{6,12,18,\_\_\_,\_\_\_,\_\_\_,\_\_\_,\_\_\_,\_\_\_,\_\_\_,\_\_\_,...\}$

Заедничките содржатели на броевите 4 и 6 се:

$C_{(4,6)} = \{12,24,36,\_\_\_,\_\_\_,\_\_\_,\_\_\_,\_\_\_,\_\_\_,...\}$

Најмалиот од нив е 12 што го нарекуваме најмал заеднички содржател на 4 и 6.

Означуваме: $НЗС(4,6) = 12$

НЗС од два или повеќе броеви ќе го користиме при наоѓање заеднички именител на дропки со различни именители.

Задача. Дадени се дропките $\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{6}$. Претворете ги овие дропки во дропки со заеднички именител.

Од горниот пример го видовме тоа: $НЗМ(4,6) = 12$. Бројот 12 ќе биде заеднички именител на дропките $\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{6}$.

$$\frac{1}{4} \xrightarrow[\cdot 3]{\cdot 3} \frac{\_\_}{12} \qquad \frac{1}{6} \xrightarrow[\cdot 2]{\cdot 2} \frac{\_\_}{12}$$

$\frac{1}{4} = \frac{1\cdot}{4\cdot 3} = -$ Значи, дропките $\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{6}$ претворени во дропки

$\frac{1}{6} = \frac{1\cdot}{6\cdot 2} = -$ со истиот именител се: $\frac{3}{12}$ и $\frac{2}{12}$

Задача. Забележете ги дропките $\frac{5}{6}$ и $\frac{3}{8}$. Претворете ги во дропки со ист именител.

$C_6 = \{6,12,18,\_\_\_,\_\_\_,\_\_\_,\_\_\_,\_\_\_,\_\_\_,\ldots\}$

$C_8 = \{8,16,24,\_\_\_,\_\_\_,\_\_\_,\_\_\_,\_\_\_,\_\_\_,\ldots\}$

$C(6,8) = \{24,48,72,\_\_\_,\_\_\_,\_\_\_,\_\_\_,\_\_\_,\_\_\_,\ldots\}$

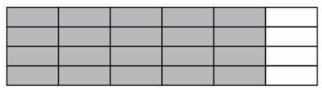
НЗС $_{(6,8)}= 24$

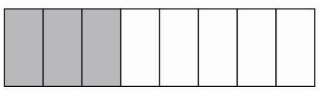
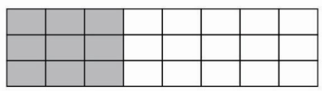
$$\frac{5}{6} = \frac{5\cdot 4}{6\cdot 4} = \frac{20}{24}$$

$$\frac{3}{8} = \frac{3\cdot 3}{8\cdot 3} = \frac{9}{24}$$

Значи заедничкиот именител на дропките $\frac{5}{6}$ и $\frac{3}{8}$ е 24.

Како ги претвораме дропките $\frac{5}{6}$ и $\frac{3}{8}$ во дропки со заеднички именител 24?

 $\frac{5}{6} =$  $\frac{20}{24}$ $\qquad \frac{5}{6} = \frac{5\cdot}{6\cdot 4} = \frac{}{24}$

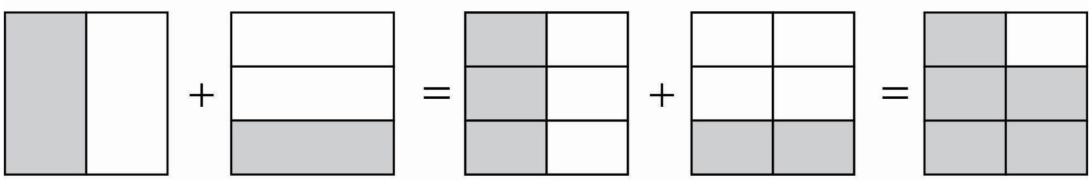
 $\frac{3}{8} =$  $\frac{15}{24}$ $\qquad \frac{3}{8} = \frac{3\cdot}{8\cdot 3} = \frac{}{24}$

Значи, дропките со различни именители можат да се претворат во дропки со ист именител.

Во последниот час научивме за собирање и одземање на дропки со ист именител.

Како можеме да собираме и одземаме дропки со различни именители?

Задача. Да ги собереме $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} =$



$\frac{1}{2}$ $\qquad \frac{1}{3}$ $\qquad \frac{3}{6}$ $\qquad \frac{2}{6}$ $\qquad \frac{5}{6}$

Значи: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{}{6} + \frac{}{6} = \frac{\quad + \quad}{6} = \frac{}{}$

Задача. Соберете ги и одземете ги дропките: а. $\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{6}$; $\qquad$ б. $\frac{3}{8}$ и $\frac{1}{6}$

Значи, треба да најдеме а. $\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=?$ $\frac{1}{4}-\frac{1}{6}=?$; б. $\frac{3}{8}+\frac{1}{6}=?$ $\frac{3}{8}-\frac{1}{6}=?$

$\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=?$

НЗС (4,6)=12. Значи заедничкиот именител на дропките е 12.

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{1\cdot}{4\cdot 3}+\frac{1\cdot}{6\cdot 2}=\frac{}{12}+\frac{}{12}=-$$

Продолжете со решавање на други задачи ...

Задача за вежбање:

$\frac{2}{15}+\frac{1}{10}=$ $\frac{7}{10}-\frac{3}{8}=$ $\frac{1}{5}-\frac{1}{10}+\frac{1}{20}=$ $\frac{3}{4}-\frac{3}{10}+\frac{1}{5}=$

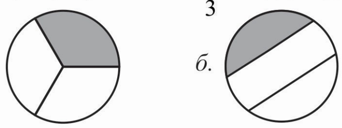
Тестови на знаења за учениците

Прилог. 14. Тематски тест од дропки за 3 одделение

Тематски тест од дропки одделение 3

1 Во кој случај е обоена $\frac{1}{3}$ од фигурата?

а. б.



И покажете зошто: ______________________

____

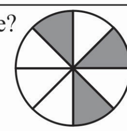
____

2 Која од дропките го означува обоениот дел од фигурите?

а.

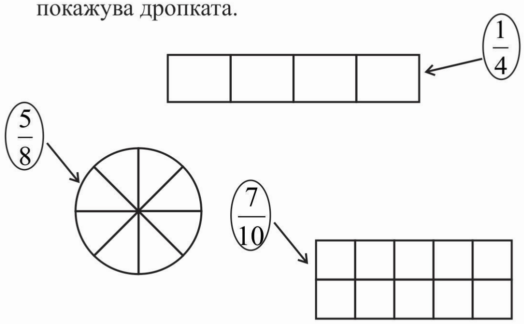
$\frac{1}{3}$ □ $\frac{1}{2}$ □ $\frac{2}{3}$ □

б.

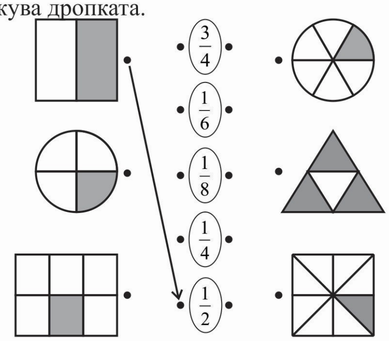


$\frac{3}{5}$ □ $\frac{3}{8}$ □ $\frac{5}{8}$ □

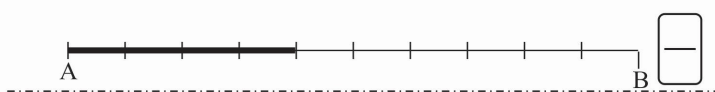
3 а. Обојте го делот од фигурата што ја покажува дропката.



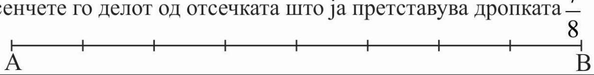
б. Поврзете ги фигурите со обоените делови што ги покажува дропката.



4 а. Забележете ја дропката што го претставува засенчениот дел од сегментот АВ.



b. Засенчете го делот од отсечката што ја претставува дропката $\frac{7}{8}$



5 Поврзете ги дропките што прикажуваат исти делови од целина.

$\frac{2}{3}$ $\frac{6}{8}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{8}{10}$

$\frac{5}{10}$ $\frac{4}{5}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{6}{9}$

6 Ставете еден од симболите > или < во квадратот меѓу дропките:

$\frac{1}{3}$ □ $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{7}$ □ $\frac{1}{7}$ $\frac{7}{9}$ □ $\frac{3}{9}$ $\frac{7}{10}$ □ $\frac{9}{10}$

$\frac{2}{3}$ □ $\frac{2}{5}$ $\frac{4}{7}$ □ $\frac{4}{9}$ $\frac{3}{6}$ □ $\frac{3}{5}$ $\frac{7}{9}$ □ $\frac{7}{10}$

7 Веса има 12 евра. Таа потрошила $\frac{2}{3}$ од нив. Колку евра потрошила?

6 евра 3 евра 8 евра

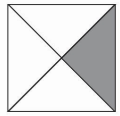
Ученик:	Училиштето:	Место:

Прилог. 15. Тематски тест на дропки за 4 одделение

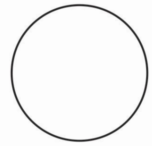
Тематски тест од дропки — одделение 4

1 а. Во кој случај е обоена $\frac{1}{4}$ од фигурата.

1. 

2. 

б. Обојте $\frac{5}{8}$ од фигурата.



2 Напиши го бројот што недостасува за да добиеш еднакви дропки:

$\frac{1}{5}=\frac{\quad}{10}$ $\qquad$ $\frac{1}{\quad}=\frac{3}{12}$ $\qquad$ $\frac{2}{10}=\frac{\quad}{5}$ $\qquad$ $\frac{\quad}{12}=\frac{2}{3}$

3 а. 1 час има 60 мин, тогаш $\frac{3}{4}$ од 1 час =____ мин

б. 1 метар има 100 cm, тогаш $\frac{4}{5}$ од1 m =______ cm

4 Ставете еден од симболите >, < или = меѓу дропките:

$\frac{2}{9}$ ___ $\frac{5}{9}$ $\qquad$ $\frac{9}{10}$ ___ $\frac{7}{10}$ $\qquad$ $\frac{2}{5}$ ___ $\frac{2}{9}$ $\qquad$ $\frac{11}{20}$ ___ $\frac{11}{21}$ $\qquad$ $\frac{17}{25}$ ___ $\frac{17}{25}$

5 Напишете број за да бидат точни следниве нееднаквости:

$\frac{1}{7}<\frac{\quad}{7}$ $\qquad$ $\frac{\quad}{8}>\frac{5}{8}$ $\qquad$ $\frac{4}{6}>\frac{\quad}{6}$ $\qquad$ $\frac{\quad}{7}<\frac{2}{7}$

6 Пополнете со дропките што недостасуваат:

$1=\frac{1}{4}+\frac{\quad}{\quad}$ $\qquad$ $1=\frac{3}{8}+\frac{\quad}{\quad}$ $\qquad$ $\frac{\quad}{\quad}+\frac{3}{10}=1$

7 Пресметај:

$\frac{2}{7}+\frac{3}{7}=$

$\frac{5}{11}-\frac{2}{11}=$

8 Кој од следниве збирови е еднаков на разликата: $\frac{7}{9}-\frac{2}{9}$

a. $\frac{2}{5}+\frac{3}{4}$ $\qquad$ *b.* $\frac{4}{9}+\frac{5}{9}$ $\qquad$ *c.* $\frac{7}{9}-\frac{2}{9}$

9 Колку е:

$\frac{3}{5}$ е $15=$

Објаснете како ги направивте пресметките: ____________________________

____

____

____

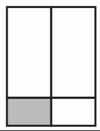
10 Луми почна да чита една книга со вкупно 300 страници. Тој досега прочитал $\frac{5}{6}$ од книгата. Колку непрочитани страници од книгата има Луми?

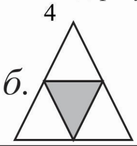
Ученик:	Училиште:	Место:

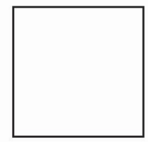
Прилог. 16. Тематски тест од дропки за 5 одделение

Тематски тест од дропки одделение 5

1 а. Во кој случај е обоена $\frac{1}{4}$ од фигурите:

а. 

б. 

б. Обојте $\frac{3}{8}$ од фигурата 

2 Напиши го бројот што недостасува за да добиеш еднакви дропки:

$\frac{3}{5}=\frac{6}{\quad}$ $\frac{3}{7}=\frac{\quad}{28}$ $\frac{15}{20}=\frac{3}{\quad}$ $\frac{30}{70}=\frac{\quad}{7}$

3 Ставете еден од симболите >, < или = меѓу дропките:

$\frac{3}{7}\_\_\frac{5}{7}$ $\frac{11}{13}\_\_\frac{9}{13}$ $\frac{11}{15}\_\_\frac{11}{20}$ $\frac{3}{7}\_\_\frac{3}{5}$

4 Подреди ги дропките според големината, од најмала до најголема:

$\frac{3}{7},\frac{1}{7},\frac{5}{7},\frac{4}{7}$ ________________________ $\frac{3}{11},\frac{3}{8},\frac{3}{10},\frac{3}{9}$ ________________________

5 Пресметајте:

$\frac{3}{11}+\frac{4}{11}=$ $\frac{11}{23}-\frac{9}{23}=$

$\frac{3}{17}+\frac{4}{17}-\frac{5}{17}=$

6 Пресметајте:

$\frac{7}{9}+\frac{1}{3}=$

$\frac{3}{10}-\frac{1}{6}=$

7 а. 1 минута има 60 секунди, тогаш $\frac{3}{10}$ од 1 мин. = _______ сек.

б. 1 ден има 24 часа, тогаш $\frac{5}{8}$ од 1 ден =________часа.

в. 1 евро има 100 центи, тогаш $\frac{2}{5}$од 1 евро = ______ центи.

8 Дјелза има 28 евра, од кои потрошила $\frac{3}{7}$од нив. Колку евра има уште непотрошени Дјелза?

Ученик:	Училиште:	Место:

Список на слики

Список на табели

Список на графикони

Список на прилози

Литература и библиографија

На македонски јазик

БРО. (2015). Наставни програми, *Основно образование, Деветгодишно образование.* Биро за развој на образованието, Скопје, Република Северна Македонија. Преземено од: https://www.bro.gov.mk/sq/%D0%BF%D0%BE%D0%B4%D0%BA%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%B3%D0%BE%D1%80%D0%B8%D0%B8/?idcat=50&customposttype=documents_category

Glavche, M., Anevska, K., & Malčeski, R. (2015). The importance of the mathematical tasks for the development of the quality of thinking of the elementary school students. Преземено од: https://www.researchgate.net/publication/283013808_The_importance_of_the_mathematical_tasks_for_the_development_of_the_quality_of_thinking_of_the_elememtary_school_students

Драговић, В., Ровчанин, Б., Газивода, Н. (2011). *У СВИЈЕТУ МАТЕМАТИКЕ 2.* Zavod za udžbenike i nasatava sredstva Crna Gora. Podgorica. Преземено 2017, од: https://zuns.me/sites/default/files/Matematika%202%20Prirucnik.pdf

Makaševska, V. (2015). *Teaching as a basis for creating condition.* 10th International Balkan Education and Science Congress on the topic of “Educatıon and globalization”. Scopje, Macedonia. Преземено од: https://eprints.ugd.edu.mk/17085/8/10-kongres%20ped%20fak%20sk%20(1).pdf

Малчески, Р. (2010). *Методика на наставата по Математика.* Скопје

Чекор по чекор – Step by step. (2011). *Средина за учење.* Преземено од: https://www.stepbystep.org.mk/WEBprostor/toolbox/fokusno_podracje_6.pdf

На други јазици

Abache, C. (2018). *A Conception of Integrated Science Education.*Преземено 2023, од: https://www.academia.edu/37183831/A_Conception_of_Integrated_Science_Education

Albayrak, A. S., Eroğlu, A., Kalaycı, Ş., Küçüksille, E., Karaatlı, M., Belma, A., и др. (2017). *Teknikat statistikore me shumë ndryshore me aplikim në SPSS*. Преземено 2023, од: https://www.researchgate.net/publication/319493569_Teknikat_Statistikore_me_Shume_Ndryshore_me_Aplikim_ne_SPSS

Allen, D. (2000). *Greek Numbers and Arithmetic*. Преземено 2022, од: https://studylib.net/doc/10546438/greek-numbers-and-arithmetic-introduction

ASCAP. (2018). *Programi i lëndës matematikë, Shkalla e parë dhe e dytë, Klasa e parë, e dytë, e tretë*. Agjencia e Sigurimit të Cilësisë së Arsimit Parauniversitar, ASCAP. Преземено 2020, од: https://ascap.edu.al/wp-content/uploads/2018/09/Matematike-Shkalla-1-2.pdf

Azemi, B., Morina, B. (2013). *Aparatura didaktike në tekstet mësimore.* Instituti Pedagogjik i Kosovës (IPK). Prishtinë. Преземено 2020, од: https://ipkmasht.rks-gov.net/wp-content/uploads/2020/12/Aparatura-didaktike.pdf

Barr, J. J. (2016). *Developing a Positive Classroom.* Преземено 2023, од: https://ideacontent.blob.core.windows.net/content/sites/2/2020/01/PaperIDEA_61.pdf

Bartlett, F. (1932). *Remembering. A study in experimental and social psychology.* Cambridge: At the University Press. Преземено 2021, од: https://typeset.io/pdf/remembering-a-study-in-experimental-and-social-psychology-2u4ugeahj8.pdf

Basic Mathematics. (n.d.). *Babylonian numeration system.* Преземено 2020, од: https://www.basic-mathematics.com/babylonian-numeration-system.html

Basic-Mathematics. (n.d.). *History of Fractions*. Преземено од: https://www.basic-mathematics.com/history-of-fractions.html

Bezuk, N., & Cramer, K. A. (1989). *Teaching about fractions: What, when, and how?* National Council of Teachers of Mathematics. Преземено 2016, од: http://www.cehd.umn.edu/ci/rationalnumberproject/89_1.html

Boaler, J (2000). Mathematics from Another World: Traditional Communities and the alienation of Learners. *Journal of Mathematical Behavior*, 18(4), 379-397. Преземено 2020, од: https://doi.org/10.1016/S0732-3123(00)00026-2

Boaler, J., & Brodie, K. (2004).*The importance, nature and impact of teacher questions. In D.E. McDougall, & J A. Ross (Eds.)*, Proceedings of the twenty- sixth annual meeting of the North American Chapter of the International Group for Psychology of Mathematics Education. Volume 2. 773-782. Toronto, Ontario. Преземено 2021, од: https://docdrop.org/download_annotation_doc/Boaler-Brodie-Questioning-cp9i8.pdf

Bollard, D. (2019). *Teaching Fractions: Five Favorite Strategies for Making Sense of Fractions. Core Learning*. Преземено 2022, од: https://www.corelearn.com/teaching-fractions/

Borgen, K. L. (2006). *From mathematics learner to mathematics teacher: Preservice teachers' growth of understanding of teaching and learning mathematics.* University of British Columbia. Преземено од: https://dx.doi.org/10.14288/1.0055178

Brada, R. (1970). *Metodika e diturive të para nga matematika.* Enti i Teksteve dhe i Mjeteve Mësimore i KSA të Kosovës. Prishtinë. Kosovo

Brdar B., Hunjek M., Lepen N. (2014). Uvođenje skupa racionalnih brojeva. *Matematički odsjek, Prirodoslovno-matematički fakultet u Zagrebu.* Преземено од: https://web.math.pmf.unizg.hr

Bruce, C. D., Chang, D., Flynn, T. (2013). *Foundations to Learning and Teaching Fractions: Addition and Subtraction.* Submitted to Curriculum and Assessment Branch. Ontario Ministry Of Education, Canada. Преземено Од: Https://Westernfractions.Weebly.Com/Uploads/2/7/2/4/27241901/Foundationstolearningandteachingfractions.Pdf

Ciosek, M., & Samborska, M. (2016). A false belief about fractions–What is its source? *Journal of Mathematical Behavior, 42*, 20-32. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2016.02.001

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2007). *Metode Istraživanja u Obrazovanju*. Naklada Slap. Zagreb. Croatia

College Math for Elementary Education (2023). *Babylonian Fractions. Blog.* https://collegemathforelementaryeducation.wordpress.com/sec-2-6/

Common Core State Standards Initiative. (2010). *Mathematics Standards.* Преземено 2028, од: https://www.thecorestandards.org/Math/

Cramer, K., Wyberg, T., & Leavitt, S. (2009). *Fraction Operations and Initial Decimal Ideas.* Rational Number Project. Преземено 2023, од: https://wayback.archive-it.org/org-121/20190122152933/http:/www.cehd.umn.edu/ci/rationalnumberproject/rnp2.html

Creswell, J. W. (2009). *Research Design.* SAGE Publications, Inc. Преземено2020, од: *https://www.ucg.ac.me/skladiste/blog_609332/objava_105202/fajlovi/Creswell.pdf*

Dehiri, I. (1982). *Tendencat bashkëkohore në mësimin e matematikës*. Enti i teksteve dhe i mjeteve mësimore i KSA të Kosovës. Prishtinë

Department for Education England. (2013). *The national curriculum in England, Framework document*. Преземено 2020, од: https://assets.publishing.service.gov.uk/media/5a7ba555e5274a7318b90006/NC_framework_document_-_FINAL.pdf

Dorfman, E. (2019). *Art, Science and th Intersection of Knowledge.* Преземено 2022, од: https://carnegiemnh.org/art-science-knowledge/

EACEA. (2011). *Matematičko obrazovanje u Europi; Zajednički izazovi i nacionalni politike.* Преземено 2023, од: https://publications.europa.eu/resource/cellar/3532f22d-eea2-4bb2-941b-959ddec61810.0003.03/DOC_1

Eduardo, S. S., & Jean, M. F. (2021). Time, culture, change and the teaching of rational numbers: a view from within. *Philosophy of Mathematics Education Journal. 37.* Преземено од: https://education.exeter.ac.uk/research/centres/stem/publications/pmej/pome37/index.html

Emanuel, G. (20016). *Why We Learn Math Lessons That Date Back 500 Years.* NPR. https://www.npr.org/sections/ed/2016/07/23/486172977/a-history-lesson-when-math-was-taboo.

Empson, Susan B.; Levi, Linda; Carpenter, Thomas P. (2011). The Algebraic Nature of Fractions: Developing Relational Thinking in Elementary School. In Cai, Jinfa & Knuth, Eric. (Eds). *Early Algebraization: A Global Dialogue for Multiple Perspectives*. Part III, 409-428.Преземено од: https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4_22

Ergović, A. (2014). Matematičko obrazovanje u Europi. *(diplomski rad),* Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku Odjel za matematiku Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike Преземено од: https://www.mathos.unios.hr/~mdjumic/uploads/diplomski/ERG03.pdf

EUROPASS. (2017). *The European Qualifications Framework.* Преземено од: https://europa.eu/europass/en/european-qualifications-framework-eqf

Facts and details. (2018). *Babylonian and mesopotamian mathematics.* Преземено 2022, од: https://africame.factsanddetails.com/article/entry-58.html

Faulkenberry, E. D., & Faulkenberry, T. J. (2006). Constructivism in Mathematics Education: A Historical and Personal Perspective. *The Texas Science Teacher*. Преземено од: https://tomfaulkenberry.github.io/research/papers/tst.pdf

Fazio, L., & Siegler, R. S. (2011). Teaching fractions, 22. *International Academy of Education, International Bureau of Education.* Преземено од: https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000212781/PDF/212781eng.pdf.multi

Filep, L. (2001). *The development, and the developing of, the concept of a fraction*. Centre for Innovation in Mathematics Teaching (CIMT). Преземено од: https://www.cimt.org.uk/journal/lffract.pdf

Furr, J. (1996). *A Brief History of Mathematics Education in America.* The University of Georgia. Презмено 2020, од: http://jwilson.coe.uga.edu/EMAT7050/HistoryWeggener.html.

FutureSchool. (2021). *German Curriculum*. Преземено 2022, од: https://www.futureschool.com/germany-curriculum/

Gabriel, F., Coché, F., Szucs, D., Carette, V., Rey, B., & Content, A. (2013). *A componential view of children's difficulties in learning fractions.* Frontiers in psychology, 4, 715. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2013.00715

Gibbons, S. J. (2012). *Manipulatives and the growth of Mathematical understanding.* (Publication No. 3212). [Doctoral dissertaction, Provo: Brigham Young University]. Преземено од: https://scholarsarchive.byu.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=4211&context=etd

Gibbs, D. (2018). *Integration vs. discipline-based approaches to learning: Not an either/or.* Преземено од: https://www.lowellschool.org/academics/integrated-learning

Glosary of Education Reform. (2013). *learning environment.* Преземено 2021, од: https://www.edglossary.org/learning-environment/

Goos, M., Stillman, G., Herbert S., Geiger, V. (2007). *TEACHING Secondary School MATHEMATICS. Research and practice for the 21st century.* Routledge, Taylor & Francis Group. London and New York, Преземено од: https://www.taylorfrancis.com/books/mono/10.4324/9781003117810/teaching-secondary-school-mathematics-vince-geiger-gloria-stillman-sandra-herbert-merrilyn-goos

Gülkılık, H., Uğurlu, H. H., & Yürük, N. (2015). Examining Students' Mathematical Understanding of Geometric Transformations Using the Pirie-Kieren Model. *Educational Sciences: Theory & Practice*. 15(6). 1531-1548. Преземено од: https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1101245.pdf

Haara, F. O., Bolstad, O. H., & Jenssen, E. S. (2017). Research on mathematical literacy in schools - Aim, approach and attention. *European Journal of Science and Mathematics Education, 5*(3), 285-313. https://doi.org/10.30935/scimath/9512

Hallinen, J. (2024). *STEM Education Curriculum*. Britannica. Преземено од: https://www.britannica.com/topic/STEM-education

HallMark. (2020). *INTEGRATED LEARNING: DEFINITION, CHARACTERISTICS AND BENEFITS*. Hallmark Public School. Преземено од: https://www.hallmarkpublicschool.com/integrated-learning-definitation-characteristics-and-beniefits/

Handal, B. (2003). Philosophies and Pedagogies of Mathematics. *PHILOSOPHY OF MATHEMATICS EDUCATION JOURNAL. 17*. Преземено од: https://www.exeter.ac.uk/research/groups/education/pmej/pome17/pdf/handal.pdf

Hanley, S. (1994). On Constructivism. *MCTP, Maryland Collaborative for Teacher Preparation*. Преземено од: https://systemika.g-i.cz/record/1622/files/Hanley,%20Susan%20-%20On%20Constructivism.pdf

Hayati, R., Fuzan, H., Iswari, M., Khaidir, A. (2018). *Designing of Holistic Mathematic Education Model Based-"System Among" at Low Grade Elementary School.* IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. 335 (2018). 012130. doi:10.1088/1757-899X/335/1/012130. Преземено од: https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1757-899X/335/1/012130/pdf

Hiebert, J., & Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics*. 65–97. Macmillan Publishing Co, Inc

IEA. (2020). *TIMSS 2019 International Results in Mathematics and Science.* Boston College: TIMSS & PIRLS International Study Center. Преземено од: https://timss2019.org/reports/

International Commision on Mathematical Instruction-ICMI, (2008). *The role of mathematics in the overall curriculum*. Преземено од: https://www.mathunion.org/icmi/role-mathematics-overall-curriculum

Italk2learn (2014). *Understanding fractions: interpretations and representations.* Преземено од: https://www.italk2learn.com/wp-content/uploads/2014/11/Understanding-fractions-Interpretations-and-representations.pdf

Iwata, K., & Yasunaga, M. (2016). Clarifying the levels of mathematical understanding based on the Pirie and Kieren's "transcendent recursive theory*". Bulletin of Fukuoka University of Education, 3, 1-14*. https://fukuoka-edu.repo.nii.ac.jp/records/952/file_details/3-01-Iwata-2016.pdf?filename=3-01-Iwata-2016.pdf&file_order=0

Jablonka, E. (2003). *Mathematical Literacy.* Publisher: Kluwer Academic Publishers. Editors: A. Bishop, M.A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick & F.K.S. Leung. *Second international handbook of mathematics education.* 75-102. Преземено од: https://www.researchgate.net/publication/226813336_Mathematical_Literacy

Jankov, D. (2011). Egipatski razlomci. *Osječki matematički list, 11*(1), 11-18. Преземено од: https://hrcak.srce.hr/74938

Klein, D. (2003). *A Brief History of American K-12 Mathematics Education in the 20th Century*. Mathematical Cognition. Презмено од: http://www.csun.edu/~vcmth00m/AHistory.html.

Kumar, R. (2014). *METODOLOGJIA E HULUMTIMIT, një udhërrefyes hap pas hapi për fillestar* (botimi i katërt). Indiana (USA), Pristina (Kosovo): CIEDR (Center for International Education, Development, and Research).

Lathan, J. (2024). *Why STEAM is so Important to 21st Century Education*. Ппреземено од: https://onlinedegrees.sandiego.edu/steam-education-in-schools/

Lawson, J. (2005). *The Fascinating Story Behind Our Mathematics*. [PowerPoint slides]. Louisiana State University. Преземено од: https://www.math.lsu.edu/~lawson/epis.pdf

Lazarević, D. K. (2012). *Matematika.* Blog Dušica Kekerić Lazarević. Преземено од https://svrle.wordpress.com/

Lippens, M. (2013). *Strategies and Resources for Fractions Through the Common Core: Grades 3 – 5.* [PowerPoint slides]. Institute of Education Science-IES, Math Institute Teaching Fractions. Преземено 2021, од: http://mrslaug.weebly.com/uploads/1/4/7/4/14749530/math_institute_teaching_fractions.pdf

Long, C., & Dunne, T. (2014). Approaches to teaching primary level mathematics. *South African Journal of Childhood Education*, 4(2), 134-153. Преземено од: https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1187200.pdf

Lortie-Forgues, H., Tian, J., & Siegler, R. S. (2015). *Why Is Learning Fraction and Decimal Arithmetic So Difficult?* Developmental Review, 38, 201-221, Преземено од: https://doi.org/10.1016/j.dr.2015.07.008

Mark, J. J. (2018). *Mesopotamia*. World History Enciklopedia. Преземено од: https://www.worldhistory.org/Mesopotamia/

Martin, L., LaCroix, L., & Fownes, L. (2005). Folding Back and the Growth of Mathematical Understanding in Workplace Training. *Adults Learning Mathematics-An International Journal.* no. 1(1), 19-35. Преземено од: https://ueaeprints.uea.ac.uk/id/eprint/59713/

Martínez, J. (2017). *Marcos teóricosen la investigacióneducativa* [PowerPoint slides]. Slideshare.https://www.slideshare.net/slideshow/presentacion-marcos-teoricos1/68144665#25

MASHT. (2005). *Plani dhe programi mësimor, Për klasën e pestë fillore*. Преземено од: https://edumedia-depot.gei.de/bitstream/handle/11163/1231/776705075_2005_A.pdf?sequence=2

MASHT. (2017a). *Korniza Kurrikulare e Arsimit Parauniversitar të Republikës së Kosovës.* Преземено од: https://masht.rks-gov.net/korniza-kurrikulare-e-arsimit-parauniversitar-te-republikes-se-kosoves/

MASHT. (2017b). *Kurrikula bërthamë për klasën përgatitore dhe arsimin fillor të Kosovës (Klasat 0, I, II, III, IV dhe V) (e rishikuar)*. Преземено од: https://masht.rks-gov.net/kurrikula-berthame-per-klasen-pergatitore-dhe-arsimin-fillor-te-kosoves-klasat-0-i-ii-iii-iv-dhe-v/

MASHT. (2019). *Kurrikula Lëndore/Programet Mësimore-Klasa e Tretë*. Преземено од: https://masht.rks-gov.net/kurrikulat-lendore-programet-mesimore-klasa-e-trete/

MASHT. (2020). *Kurrikula Lëndore/Programet Mësimore-Klasa e Katërt*. Преземено од: https://masht.rks-gov.net/kurrikulat-lendore-programet-mesimore-klasa-e-katert/

Mason, J., & Spence, M. (1999). Beyond mere knowledge of mathematics: The importance of knowing-to act in the moment. *Educational Studies in Mathematics*, 135–161. Преземено од: https://www.researchgate.net/profile/John-Mason-18/publication/225853894_Beyond_Mere_Knowledge_of_Mathematics_The_Importance_of_Knowing-to_Act_in_the_Moment/links/568e6f2e08aead3f42ef78e3/Beyond-Mere-Knowledge-of-Mathematics-The-Importance-of-Knowing-to-Act-in-the-Moment.pdf

Matthews, B., & Ross, L. (2010). *Metodat e Hulumtimit, Udhëzues praktik për shkencat sociale dhe humane.* Tiranë: CDE, (Center of Democratic Education).

Melbourne Graduate School of Education. (2006). *History of Decimals and the Metric System.* Преземено од: https://extranet.education.unimelb.edu.au/SME/TNMY/Decimals/Decimals/backinfo/metric.htm

MENW. (2022). *Designing learning environments.* Преземено од: https://www.education.govt.nz/school/property-and-transport/projects-and-design/design/designing-learning-environments/learning-environments-for-education-outcomes/

Merzbach, U. C., & Bayer, C. B. (2011). *A History of Mathematics.* New Jersey, USA: John Wiley & Sons, Inc. Преземено од: https://atiekubaidillah.files.wordpress.com/2013/03/a-history-of-mathematics-3rded.pdf

Mestrinho, N., & Cavadas, B. (2018). Innovation in Teacher Education: An Integrative Approach to Teaching and Learning Science and Mathematics. *MDPI Journals,* 2(21). Преземено од: https://doi.org/10.3390/proceedings2211343

Miller, J. (2022). *Earliest Uses of Symbols for Fractions.* Преземено од: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Miller/mathsym/fractions/

Mochon, G. P. (2014). *Using Roman Numbers*. The Bourbaki Popularity Glitch of 2018. Преземено од: http://www.numericana.com/answer/roman.htm

Mokwebu, D. J. (2013). *An exploration of the growth in mathematical understanding of grade 10 learners.* Limpopo: University of Limpopo, Turfloop Campus. Преземено од: http://ulspace.ul.ac.za/bitstream/handle/10386/1203/mokwebu_dj_2013.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Morgan, H. (2021). *Howard Gardner's Multiple Intelligences Theory and his Ideas on Promoting Creativity.* Преземено од: https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED618540.pdf

Movchan, S. (2024). *What Makes a Good Learning Environment.* Преземено од: https://raccoongang.com/blog/what-makes-good-learning-environment/

Munari, A. (1994). Jean Piaget (1896–1980). *UNESCO: International Bureau of Education*, vol. XXIV, no. 1/2. 311–327. Преземено од: https://mail.orientation94.org/uploaded/MakalatPdf/Mufakirun/piagete.pdf

Matematiikkalehti. (2005). *The PISA survey tells only a partial truth of Finnish children's mathematical skills.* Преземено од: https://matematiikkalehtisolmu.fi/2005/erik/PisaEng.html

Nakamura, G., & Koyama, M. (2018). A cross-tools Pirie-Kieren model for visualizing the process of mathematical understanding. *Proceedings of 8th ICMI – EastAsia Regional Conference on Mathematics Education. Taipe, Taiwan*, 154-165. Прземено од: https://www.researchgate.net/publication/329781403_A_CROSS-TOOLS_PIRIE-KIEREN_MODEL_FOR_VISUALIZING_THE_PROCESS_OF_MATHEMATICAL_UNDERSTANDING

NCTM. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* Преземено од: https://www.nctm.org/Standards-and-Positions/Principles-and-Standards/

Nelson, K. (2015). *Why Are Fractions So Hard to Teach? 5 Ways to Help Students (Even High Schoolers!) Understand Them.* Преземено од: www.weareteachers.com

Noti, K. (2013). *Kurrikula dhe aplikimi në tekstet shkollore sipas modeleve bashkëkohore.* Tirana: University of Tirana. http://www.doktoratura.unitir.edu.al/wp-content/uploads/2014/04/Doktoratura-Kozeta-Noti-Fakulteti-i-Shkencave-Sociale-Departamenti-Psikologji-Pedagogjise.pdf.

Noura, K. (2009). *Understanding Fractions: What Happens Between Kindergarten And The Army?* Преземено од: https://www.mav.vic.edu.au/Tenant/C0000019/00000001/downloads/Resources/annual-conferences/2009/03Noura.pdf

OAME-Ontario Association for Mathematics Education (2006). *Number Sense and Numeration. Grade 4 to 6. Volume 5. Fractions. A Guide to Effective Instruction in Mathematics, Kindergarten to Grade 6*. Ontaria, Canada. Преземено од: https://oame.on.ca/eduproject/ontariomathedresources/files/Number%20Sense%20and%20Numeration%20Vol%205%20Fractions%204-6.pdf

Odendahl, W. (2017). Bildungs krise – Pisa abd the German Educational Crisis. *IAFOR Journal of Education,* 5(1). 209-226. Преземено од: https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1141682.pdf

OECD. (2013). *PISA 2015. Draft Mathematics Frameworks*. Преземено од: https://www.oecd.org/pisa/pisaproducts/Draft%20PISA%202015%20Mathematics%20Framework%20.pdf

OECD. (2016a). *The school learning environment.* PISA 2015 Result (Volume II): Policies and pracices for successful school. Преземено од: https://www.oecd-ilibrary.org/docserver/9789264267510-7-en.pdf?expires=1633884796&id=id&accname=guest&checksum=A4D674D43E8DA855109DBC8B73E3C903

OECD. (2016b). *PISA 2015 Results. EXCELLENCE AND EQUITY IN EDUCATION.* Volume I. Paris: OECD. Преземено од: https://www.oecd.org/publications/pisa-2015-results-volume-i-9789264266490-en.htm

OECD. (2018a). *PISA for Schools.* Преземено од: https://www.oecd.org/pisa/aboutpisa/

OECD. (2018b). *PISA 2021, Mathematics Frame Works (Second Draft)*. Преземено од: https://www.oecd.org/pisa/pisaproducts/pisa-2021-mathematics-framework-draft.pdf

OECD. (2019a). *Kosovo - Country Note - PISA 2018 Results, What 15-year-old students in Kosovo know and can do.* Преземено од: https://www.oecd.org/pisa/publications/PISA2018_CN_KSV.pdf

OECD. (2019b). PISA 2018 *Results. WHAT STUDENTS KNOW AND CAN DO.* Volume I. Paris: OECD. Преземено од: https://www.oecd.org/publications/pisa-2018-results-volume-i-5f07c754-en.htm

Ozer, O. (2004). *Constructivism in Piaget and Vygotsky*. Fountain Magazine. Преземено од: https://fountainmagazine.com/all-issues/2004/issue-48-october-december-2004/constructivism-in-piaget-and-vygotsky

Pirie, S. E., & Kieren, T. (1994a). Beyond metaphor: Formalising in mathematical understanding within constructivist environments. *For the learning of Mathematics, 14*(1), 39-43. Преземено од: https://flm-journal.org/Articles/83AE5FE212FCAC7DB193917FADF90.pdf

Pirie, S., & Kieren, T. (1992). Creating constructivist environments and constructing creative mathematics. *Educational studies in mathematics, 23*(5), 505-528. Преземено од: https://doi.org/10.1007/BF00571470

Pirie, S., & Kieren, T. (1994б). Growth in mathematical understanding: How can we characterise it and how can we represent it? *Education Studies in Mathematics, 26*, 165–190. Преземено од: https://doi.org/10.1007/BF01273662

Pirie, S.E., & Kieren, T.E. (1989). A Recursive Theory of Mathematical Understanding. *for the learning of mathematics, 9*, 7-11. Преземено од: https://flm-journal.org/Articles/339B51168E57EF2E1E42175EA8147D.pdf

Pon, N. (2001). Constructivism in the Secondary Mathematics Classroom. *Egallery*. Преземено од: https://people.ucalgary.ca/~egallery/volume3/pon.html.

Prideaux, J. B. (2007). The Constructivist Approach to Mathematics Teaching and the Active Learning Strategies used to Enhance Student Understanding. *St. John Fisher University.* Преземено од: https://fisherpub.sjf.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1028&context=mathcs_etd_masters

Rexhepi, H. (2017). *Trajtimi i thyesave në klasën e gjashtë në disa vende të Ballkanit.* (Необјавен магистерски труд). University Prishtina „Hasan Prishtina“, Faculty of Education, Prishtina, Kosovo.

Rexhepi, H. (2018). *Problemet dhe keqkuptimet gjatë të mësuarit dhe të kuptuarit të thyesave*. Reforma (6/2018), 419-425. Gjilan, Kosovo

Robitaille, D., & Dirks, M. (1982). *Models for the Mathematics Curriculum.* Преземено од: https://flm-journal.org/Articles/49AD035443452EC49BFF1FFBE32341.pdf

Scardamalia, M., Bereiter, C. (2006). Knowledge Building: Theory, pedagogy and technology. *Cambridge Handbook of the Learning'Sciences*, 97-118, New York: Cambridge University Press. Преземено од: https://ikit.org/fulltext/2006_KBTheory.pdf

Shkenca.org. (a.d.). *Fjalori i gjuhës së sotme shqipe.* Преземено 2020, од: *http://www.fjalori.shkenca.org/*

Siegler, R. S., Fazio, L. K., Bailey, D. H., & Zhou, X. (2012). Fraction: The new frontier for theoires of numerical develompent. *Trends in Cognitive Sciences , 17* (1). Преземено од: 13-19. https://doi.org/10.1016/j.tics.2012.11.004

Siegler, R., Carpenter, T., Fennell, F., Geary, D., Lewis, J., Okamoto, Y., Thompson, L., Wray, J. (2010). Developing Effective Fractions Instruction for Kindergarten Through 8th Grade, *Institute of Education Sciences (IES)*. *U.S. DEPARTMENT OF EDUCATION*. Преземено од: https://ies.ed.gov/ncee/wwc/Docs/PracticeGuide/fractions_pg_093010.pdf

Simplicio, H., Gasteiger, H., Dorneley, B. V, Grimez, K. R., Haase, V. G., Ruiz, C., Liedtk, F. V., Moeller, K. (2020). Cognitive Research and Mathematics Education—How Can Basic Research Reach the Classroom? *Frontiers in Psychology* , 239–250; Преземено од: https://doi.org/10.3389/fpsyg.2020.00773.

Stiff, L. V. (2001). Constructivist Mathematics and Unicorns. *NCTM News Bulletin*, Преземено од: https://www.nctm.org/News-and-Calendar/Messages-from-the-President/Archive/Lee-V_-Stiff/Constructivist-Mathematics-and-Unicorns/.

Sýkorová, I. (2010). *Fractions in Ancient Indian Mathematics*. WDS'10 Proceedings of Contributed Papers, Part I. 133–138. Преземено од: https://physics.mff.cuni.cz/wds/proc/pdf10/WDS10_122_m8_Sykorova.pdf

Story of Mathematics. (2013). *Medieval mathematics*. Преземено од: https://www.storyofmathematics.com/medieval.html/

Thijs, A., & van den Akker, J. (2009). *Leerplan in ontwikkeling*. Stichting Leerplan Ontwikkeling (SLO). Преземено од: https://www.slo.nl/@4285/leerplan/

Thom, J. S., & Pirie, S. E. (2006). Looking at the complexity of two young children's understanding of number. *Journal of Mathematical Behavior, 25*, 185-195. Преземено од: https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2006.09.004

Thompson, E. (2010). *Mind in Life.* HARVARD UNIVERSITY PRESS, London, England. Презмено од: https://lchc.ucsd.edu/MCA/Mail/xmcamail.2012_03.dir/pdf3okBxYPBXw.pdf.

Thomson, S., Hillman, K., & Bortoli, L. D. (2013). *A teachers guide to PISA mathematical literacy.* Преземено од: https://www.acer.org/files/PISA_Thematic_Report_-_Maths_-_web.pdf

Turcan, R. *Fractions.* Math10 (Math Problems, Test, Forums). Преземено од: https://www.math10.com/en/algebra/fractions.html

Thechocolateteacher. (2021). *My Favorite Activities for Teaching Fractions in the Primary Classroom*. Преземено од: https://www.thechocolateteacher.com/2021/05/Teaching-Fractions.html

UIOWA College of Education. (n.d.). *Learning Environment.* Преземено од: https://www2.education.uiowa.edu/html/eportfolio/tep/07e190-191folder/LearningEnvironment/learning_environment.htm

UNESCO, Byroja Ndërkombëtare e Edukimit. (2008). *Mendimtarët për Edukimin, Visari i arsimit dhe pedagogjisë botërore.* Plejad, Tiranë.

Van de Walle, J. A., Karp, K. S., & Bay-Williams, J. M. (2010). *Elementary and Middle School Mathematics* (Seventh Editions). Boston, New York, San Francisko, Mexico City, Montreal, Toronto, London, Madrid, Munich, Paris, Hong Kong, Singapore, Tokyo, Cape Town, Sydney: Allyn & Bacon.

Van Steenbrugge, H., Remillard, J.T., Verschaffel, L., Valcke, M., & Desoete, A. (2015). Teaching Fractions in Elementary School. *The Elementary School Journal, 116*, 49 - 75. Преземено од: https://www.semanticscholar.org/paper/Teaching-Fractions-in-Elementary-School-Steenbrugge-Remillard/b6908d3d5fa9999275451674e8924f47349cdc0c?p2df

Verschaffel, L., & Corte, E. D. (2015). Mathematics Education. Theoretical Views on Mathematics Education. *International Encyclopedia of the Social & Behavioral Sciences (Second Edition)*. Преземено од: https://www.sciencedirect.com/topics/social-sciences/mathematics-education

Walle, J., Karp, K., Bay-Williams, J. (2016). *Revel for Elementary and Middle School Mathematics. (Chapter 15). Teaching Developmentally - Access Card, 9th Edition,* https://www.pearsonhighered.com

Watanabe, T. (2006). The teaching and Learning of Fractions: A japanese Perspective. *Teaching Children Mathematics. (pp. 368-374).*Преземено од: https://academicinnovation.weebly.com/uploads/7/6/3/6/7636030/teaching_and_learning_fractions_japanese_perspective_nctm.pdf

Watanabe, T. (2007). Initial Treatment of Fractions in Japanese Textbooks. *Focus on Learning Problems in Mathematics. Spring Edition 2007. Volume 29(2).* Преземено од: https://lessonresearch.net/wp-content/uploads/2018/07/WatanabeTreatment.pdf

WAUKEE Comunity School District. (2018). *IOWA Core: Characteristics of Effective Instruction*. Преземено од: https://waukeeschools.b-cdn.net/app/uploads/2018/12/Characteristics-of-Effective-Instruction.pdf

WGU. (2020). *What is Behavior Learning Theory?* Преземено од: https://www.wgu.edu/blog/what-behavioral-learning-theory2005.html

Woolfolk, A. (2011). *Psikologji Edukimi.* Tiranë: CDE (Center Democratic of Education).

Wu, H.-H. (2014). *Teaching Fractions According to the Common Core Standards.* Преземено од: https://math.berkeley.edu/~wu/CCSS-Fractions_1.pdf

Yale University (2016). *A 3D-print of ancient history: one of the most famous mathematical texts from Mesopotamia.* Преземено од https://ipch.yale.edu/news-events/3d-print-ancient-history-one-most-famous-mathematical-texts-mesopotamia

Yang, Z., Yang, X., Wang, K., Zhang, Y., Pei, G., & Xu, B. (2021). The Emergence of Mathematical Understanding: Connecting to the Closest Superordinate and Convertible Concepts. *Frontiers in Psychology*, v. 12. Преземено од: https://doi.org/10.3389/fpsyg.2021.525493

Yao, X., & Manouchehri, A. (2020). Teacher Interventions for Advancing Students'. *Mathematical Understanding, 10* (6). Преземено од: https://doi.org/10.3390/educsci10060164

Yglesias, M. (2022). 5 tips on how to teache fractions. Преземено од: https://moretime2teach.com/how-to-teach-fractions/

Zejnullahu, R., Bilalli, S. *Matematika 3*. (2005). Pejë. Dukagjini

Zejnullahu, R., Bilalli, S. *Matematika 4*. (2006). Pejë. Dukagjini

Zejnullahu, R., Bilalli, S. *Matematika 5*. (2007). Pejë. Dukagjini

Zherar, F. M., & Rozhje, K. (2003). *Hartimi dhe vlerësimi i teksteve mësimore. Pedagogjia në zhvillim dhe praktike metodike.* Преземено од: https://dokumen.tips/documents/hartimi-dhe-vlersimi-i-teksteve-shkollores3e-prcakton-bazn-konceptuale-t.html?page=1

Ziegler, G. M., & Loos, A. (2017). "What is mathematics?" and why we should ask, where one should experience and learn that, and how to teach it, *Proceedings of the 13th International Congress on Mathematical Education*, 63-77, Hamburg, Germany. Преземено од: https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-319-62597-3_5